

RELACIÓN 5:EJERCICIOS DE REPASO GEOMETRÍA

M^aMar Mateo Roperro

Abril de 2007

1. **Calcula m y n para que se verifique:** $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ **siendo**
 $\vec{a} = (1, -3), \vec{b} = (5, 2), \vec{x} = (2, -4)$

Solución:

$$(2, -4) = m(1, -3) + n(5, 2) \rightarrow \begin{cases} 2 = m + 5n \\ -4 = -3m + 2n \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos: $m = \frac{24}{17}, n = \frac{2}{17}$

2. **Considera los vectores** $\vec{u} = (1, n), \vec{v} = (3, -2)$. **Calcula n para que:**

a) $\vec{u}, \vec{v}$ **formen un ángulo de 90°.**

b) $\vec{u}, \vec{v}$ **tengan el mismo módulo.**

Solución:

a) $\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|3-2n|}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{13}}$ como el ángulo que forman es 90° entonces sustituyendo tenemos: $0 = \frac{|3-2n|}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{13}} \Rightarrow |3-2n| = 0 \Rightarrow 3-2n = 0 \Rightarrow n = \frac{3}{2}$

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Rightarrow \sqrt{1+n^2} = \sqrt{13} \Rightarrow 1+n^2 = 13 \Rightarrow n = \pm 2\sqrt{3}$

3. **Sean los vectores:** $\vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (3, 7)$. **Halla dos vectores cuya suma sea el vector** $\vec{b}$ **y tales que uno tenga la misma dirección de** $\vec{a}$ **y el otro sea perpendicular a** $\vec{a}$.

Solución:

Como $\vec{u}$ y $\vec{a}$ tienen la misma dirección se verifica $\vec{u} = k\vec{a}$ entonces $\vec{u} = (4k, 2k)$ cuyo módulo es $|\vec{u}| = \sqrt{16k^2 + 4k^2} = 2k\sqrt{5}$. Además

$|\vec{u}|$ = proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$, es decir, $|\vec{u}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$ sustituyendo tenemos:
 $2k\sqrt{5} = \frac{26}{\sqrt{20}}$ con $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 + 14 = 26$ y $|\vec{a}| = \sqrt{20}$. Despejando k tenemos:
 $k = \frac{13}{10}$.

Por lo tanto:

$$\vec{u} = \frac{13}{10}(4, 2) = \left(\frac{52}{10}, \frac{26}{10}\right) = \left(\frac{26}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

Como $\vec{u} + \vec{v} = \vec{b}$ sustituyendo tenemos: $\left(\frac{26}{5}, \frac{13}{5}\right) + (x_2, y_2) = (3, 7) \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{-11}{5}, \frac{22}{5}\right)$

4. De los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ conocemos que sus módulos son 2 y 5 respectivamente, y el ángulo que forman es 60° . Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$

Solución:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha + |\vec{b}|^2 = 39$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{39}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \bullet \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha + |\vec{b}|^2 = 19$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{19}$$

5. Dados los puntos: $A(2, -3), B(5, 2), C(4, 4)$, halla el punto D de modo que ABCD sea un paralelogramo. Demuestra que los puntos medios de sus diagonales coinciden.

Solución:

a) Representamos gráficamente los puntos A, B, C y buscamos el punto D. Observamos que $\vec{AB} = \vec{DC}$ con $\vec{AB} = (3, 5)$ y $\vec{DC} = (4 - x, 4 - y)$ igualando tenemos: $x = 1, y = -1$

b) Punto medio AC: $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+4}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{2}\right)$
 Punto medio BD: $\left(\frac{5+1}{2}, \frac{2-1}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{2}\right)$

6. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,-3) y forma un ángulo de 45° con la recta $3x - y + 3 = 0$

Solución:

$3x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3x + 3 \Rightarrow m = 3$ (pendiente) $\Rightarrow \tan\alpha = \left|\frac{3-m}{1+3m}\right|$
 como $\alpha = 45^\circ$ sustituyendo tenemos $1 = \left|\frac{3-m}{1+3m}\right|$ tenemos los siguientes casos:

a) $1 = \frac{3-m}{1+3m} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

b) $-1 = \frac{3-m}{1+3m} \Rightarrow m = -2$

Por lo tanto las ecuaciones de las rectas r,s en forma punto-pendiente son:

$$a) y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$b) y + 3 = -2(x - 2)$$

7. Los puntos de coordenadas P(3,8), Q(-11,3), R(-8,-2) son vértices de un triángulo.

a) Comprueba que el triángulo es isósceles.

b) Halla el área del triángulo.

Solución:

a) Un triángulo es isósceles si tiene dos lados iguales y un desigual. La longitud de cada uno de esos lados es la distancia entre los puntos:

$$d(P, Q) = \sqrt{(-11 - 3)^2 + (3 - 8)^2} = \sqrt{221}$$

$$d(P, R) = \sqrt{(-8 - 3)^2 + (-2 - 8)^2} = \sqrt{221}$$

$$d(R, Q) = \sqrt{(-11 - 8)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{34}$$

Como $d(P, Q) = d(P, R)$ por lo tanto isósceles.

b) Sabemos que $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Tomamos como base $\vec{QR}$. La altura será la distancia de P a QR.

Ecuación de QR:

$$m = \frac{-2 - 3}{-8 - 11} = \frac{-5}{-19} \Rightarrow y = 3 - \frac{5}{19}(x + 11) \Rightarrow 19y + 5x + 46 = 0$$

Altura:

$$d(P, QR) = \frac{|5x + 19y + 46|}{\sqrt{5^2 + 19^2}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$$

Por lo tanto el área será: $A = 85/2$ Como el triángulo es isósceles, también se puede calcular la altura como la distancia entre P y el punto medio de QR.

8. Encuentra el punto de la recta $r : 4x - 8y + 7 = 0$ que equidista de los puntos A(2, 1), B(1, -3).

Solución:

Sea P(x, y) el punto que buscamos. $|\vec{AP}| = |\vec{BP}| \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} =$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} \Rightarrow 2x + 8y + 5 = 0.$$

Como $P(x, y)$ verifica la recta r , tenemos:

$$\begin{cases} 2x + 8y + 5 = 0 \\ 4x - 8y + 7 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos: $P(-2, -1/8)$.

9. **Un rombo tiene el vértice A en el eje de abscisas. Otros dos vértices opuestos son $B(3, 1)$, $D(-5, -3)$. Halla A, C.**

Solución:

Las diagonales del rombo son perpendiculares en su punto medio.

El punto A está en la diagonal AC. Hallamos la ecuación de AC:

$$M\left(\frac{3-5}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (-1, -1)$$

Pendiente de BD: $m = \frac{1+3}{3+5} = \frac{1}{2}$ Pendiente de AC: $m' = -2$ Por lo tanto la recta será: $y = -1 - 2(x + 1)$

Como A está en el eje de abscisas $Y=0$, tenemos:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tenemos: $A(-\frac{3}{2}, 0)$.

El vértice C es el simétrico de A respecto de M. Escribimos esta condición:

$$\left(\frac{-3/2 + x}{2}, \frac{0 + y}{2}\right) = (-1, -1) \Rightarrow x = -1/2, y = -2$$

10. **Hallar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:**

$$3x + 4y - 5 = 0$$

$$x - 3y - 6 = 0$$

Como $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ las rectas son secantes.

11. **Hallar una recta perpendicular y otra paralela a $r : 2x - 5y + 4 = 0$ que pasen por el punto $P(-3, 0)$**

Solución:

La pendiente de la recta r es: $Y = \frac{2x+4}{5} \Rightarrow m = \frac{2}{5}$

Una recta paralela será aquella que tiene igual pendiente: $y = 0 + \frac{2}{5}(x + 3)$

Una recta perpendicular será: $y = 0 - \frac{5}{2}(x + 3)$

12. **Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta:** $5x - y + 11 = 0$

Solución:

Para $x = t$ tenemos $5t - y + 11 = 0 \Rightarrow y = 5t + 11$

Por tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}x &= t \\ y &= 5t + 11\end{aligned}$$

13. Si $M(7,4)$, $N(-2,1)$ hallar un punto P en el segmento MN tal que la distancia de M a P sea la mitad de la distancia de P a N .