4º ESO – opción B – Ejercicios

Geometría Analítica

1) ***Las coordenadas de un punto A son (3,1) y las del vector $\overrightarrow{AB}$ son (3,4). ¿Cuáles son las coordenadas de punto B?***
Determina otro punto C de modo que el vector $\overrightarrow{AC}$ tenga el mismo módulo y la misma dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$, pero distinto sentido

<u>Resolución:</u>

Lo primero que tendremos que tener en cuenta es la manera de calcular las coordenadas cartesianas de un vector, recuerda, dados el punto $A(a_1,a_2)$ y el punto $B(b_1,b_2)$ se tiene que:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 – a_1, b_2 – a_2)$$

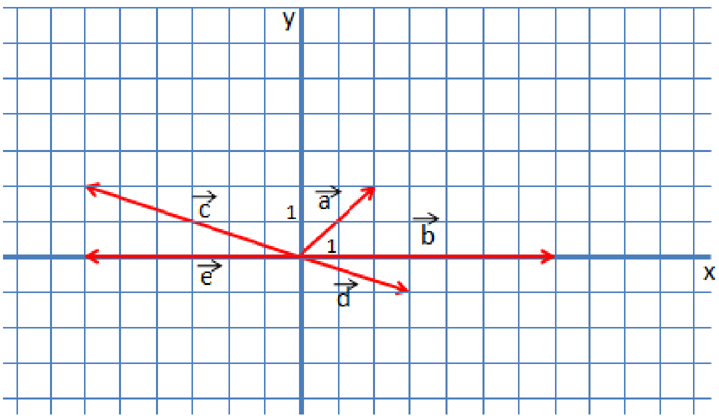
Así pues para la primera pregunta nos dan las coordenadas del vector y la de uno de los puntos y nos piden las del otro. Sustituyendo en la fórmula anterior y despejando tendremos el resultado:

$(3 , 4) = (b_1 – 3, b_2 – 1)$ con lo que
$3 = b_1 – 3 \Rightarrow \mathbf{b_1 = 6}$
$4 = b_2 – 1 \Rightarrow \mathbf{b_2 = 5}$

Para la segunda pregunta nos piden determinar un punto c con mismo módulo pero sentido contrario, para ello nos bastará con cambiar ambas coordenadas de signo y hacer la misma operación pues el origen tiene que seguir siendo el punto A.

$(–3 , –4) = (c_1 – 3, c_2 – 1)$ con lo que
$–3 = b_1 – 3 \Rightarrow \mathbf{c_1 = 0}$
$–4 = b_2 – 1 \Rightarrow \mathbf{c_2 = –3}$

2) ***Hallar las coordenadas de los vectores de la figura.***



4º ESO – opción B – Ejercicios

Resolución:

Nos piden determinar las coordenadas de los representantes de los vectores libres marcados en rojo. Para ello y como el origen de los vectores es el origen de coordenadas bastará con ver a punto del plano "apuntan" para así saber que vectores son:

Así tendremos que,

$\vec{a} = (2 , 2)$
$\vec{b} = (7 , 0)$
$\vec{c} = (-6 , 2)$
$\vec{d} = (3 , -1)$
$\vec{e} = (-6 , 0)$

3) ***Dados los vectores $\vec{u} = (6 , 5)$; $\vec{v} = (-3 , 0)$ y $\vec{w} = (2 , -4)$, calcula:***
   - ***a) $2\vec{u}$***
   - ***b) $3\vec{v} - \vec{w}$***
   - ***c) $5(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w}$***

Resolución:

Nos piden determinar las coordenadas de los vectores resultado de esas operaciones. Recuerda para operar vectores la jerarquía que conocen para operaciones con números es válida, es decir, es la misma, primero paréntesis, luego productos y por último sumas.

a) $2\vec{u} = 2(6 , 5) = \mathbf{(12 , 10)}$

b) $3\vec{v} - \vec{w} = 3(-3 , 0) - (2 , -4) = (-9, 0) - (2 , -4) = \mathbf{(-11 , 4)}$

c) $5(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w} = 5[(6 , 5) - (-3 , 0)] + (2 , -4) = 5(9 , 5) + (2 , -4) =$

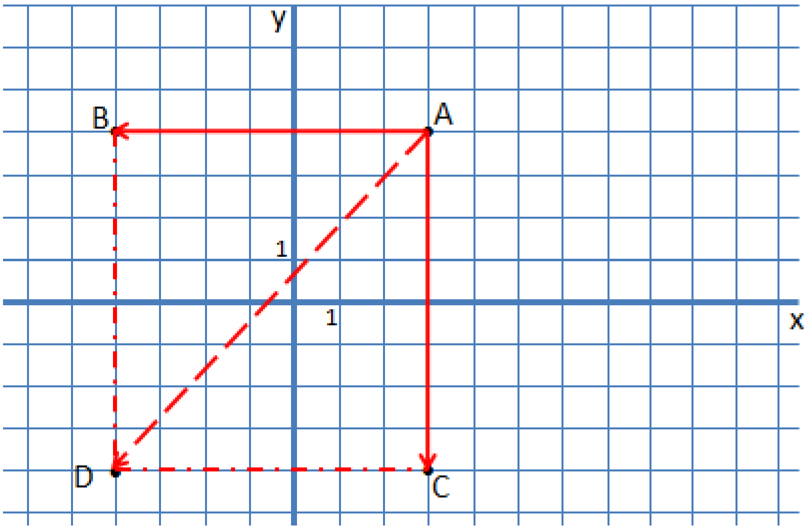
$= (45 , 25) + (2 , -4) = \mathbf{(47 , 21)}$

4) ***Los vértices de un paralelogramo son A(3,4); B(–4,4); C(3, –4) y D ¿Cuáles son las coordenadas del punto D?***

Resolución:

Primero representemos los puntos en un sistema de coordenadas.

4º ESO – opción B – Ejercicios



Como podemos observar lo que se forma es un rectángulo y el punto D es la resultante de la suma de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$. Así pues y aunque vemos que el punto D será el (–4 , –4) calculémoslo de forma analítica, ie (del latín *ite est*, es decir) "con numeritos"

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} = (-7 , 0) + (0 , -8) = (-7 , -8)$

Así ahora tenemos las coordenadas del punto A y las del vector $\vec{AD}$, con lo que despejando tendremos las coordenadas del punto D

$\vec{AD} = (-7 , -8) = (d_1 - a_1 , d_2 - a_2) = (d_1 - 3, d_2 - 4)$, con lo que tenemos,

$-7 = d_1 - 3 \Rightarrow$ $\mathbf{d_1 = -4}$
$-8 = d_2 - 4 \Rightarrow$ $\mathbf{d_2 = -4}$ **cqd (como queríamos demostrar)**

5) ***Dados los vectores $\vec{u} = (1 , 2)$; $\vec{v} = (3 , -4)$; $\vec{w} = (2 , -3)$ y $\vec{z} = (4 , -6)$, realiza estas operaciones:***
   a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$
   b) $\vec{w} \bullet \vec{z}$
   c) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w}$

<u>Resolución:</u>

Como vemos las operaciones que nos están pidiendo es realizar el producto escalar de esos vectores. Para ello aplicaremos la fórmula del producto escalar que dice:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (u_1 , u_2) \bullet (v_1 , v_2) = u_1 \bullet v_1 + u_2 \bullet v_2$$

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (1 , 2) \bullet (3 , -4) = 1 \bullet 3 + 2 \bullet (-4) = 3 - 8 = \mathbf{-5}$

b) $\vec{w} \bullet \vec{z} = (2 , -3) \bullet (4 , -6) = 2 \bullet 4 + (-3) \bullet (-6) = 8 + 18 = \mathbf{26}$

4º ESO – opción B – Ejercicios

c) En este caso aplicaremos la jerarquía de las operaciones y primero resolveremos los paréntesis para luego realizar el producto escalar,

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = [((1 , 2) + (3 , -4)] \cdot (2 , -3) = (4 , -2) \cdot (2 , -3) =$

$= 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = 8 + 6 = \mathbf{14}$

6) ***Los módulos de dos vectores son 6 y 10. Halla el producto escalar de ambos vectores si el ángulo que forman es de 60º***

<u>Resolución:</u>

Nos piden el producto escalar pero no nos dan las coordenadas de los vectores sino los módulos y el ángulo que forma, así pues aplicaremos la fórmula que dice:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 6 \cdot 10 \cdot \cos 60^{o} = 60 \cdot 0{,}5 = \mathbf{30}$

7) ***Calcula el módulo de los siguientes vectores:***
a) $\vec{a} = (3 , -1)$
b) $\vec{b} = (-2 , -7)$
c) $\vec{c} = (-4 , 5)$
d) $\vec{d} = (6 , 0)$

<u>Resolución:</u>

Para calcular el módulo de los vectores aplicaremos la fórmula del módulo de un vector que es:

Dado $\vec{v} = (v_1 , v_2)$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Así pues,

a) Dado $\vec{a} = (3 , -1)$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

b) Dado $\vec{b} = (-2 , -7)$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$

c) Dado $\vec{c} = (-4 , 5)$ $\quad |\vec{c}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

d) Dado $\vec{d} = (6 , 0)$ $\quad |\vec{d}| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$

4º ESO – opción B – Ejercicios

8) Dados los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (12, 5)$, halla el ángulo que forman estas parejas:

a) $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$
b) $-\vec{u}$ *y* $-\vec{v}$
c) $-\vec{u}$ *y* $\vec{v}$
d) $\vec{u}$ *y* $-\vec{v}$

Resolución:

Para calcular el ángulo que forman aplicaremos la fórmula correspondiente:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \bullet |\vec{v}|}$$

Así lo primero será calcular el módulo de los vectores:

Dado $\vec{u} = (4, 3)$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Dado $-\vec{u} = (-4, -3)$ $\quad |-\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

Dado $\vec{v} = (12, 5)$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$

Dado $-\vec{v} = (-12, -5)$ $\quad |-\vec{v}| = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$

Así pues, ahora tendremos:

a) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{4 \bullet 12 + 3 \bullet 5}{5 \bullet 13} = 0{,}969230769231 =$ **14,2500326977º**

b) $\cos(-\vec{u}, -\vec{v}) = \dfrac{(-4)\bullet(-12)+(-3)\bullet(-5)}{5 \bullet 13} = 0{,}969230769231 =$ **14,2500326977º**

Como cabía esperar al cambiar el signo a ambos vectores nos queda el mismo ángulo.

c) $\cos(-\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{(-4)\bullet 12+(-3)\bullet 5}{5 \bullet 13} = -0{,}969230769231 =$ **165,749967302º**

Como cabía esperar al cambiar el signo al primero de ellos nos queda el ángulo suplementario.

d) $\cos(\vec{u}, -\vec{v}) = \dfrac{4 \bullet(-12)+3 \bullet(-5)}{5 \bullet 13} = -0{,}969230769231 =$ **165,749967302º**

Como cabía esperar al cambiar el signo al segundo de ellos nos queda el ángulo suplementario.

4º ESO – opción B – Ejercicios

9) Sean A(2 , 3) Y B(–8 , 7) dos puntos del plano.
   a) Calcula la distancia entre ambos
   b) Halla las coordenadas del punto medio del segmento
   c) Comprueba que la distancia entre A y M es la mitad que la distancia entre A y B

Resolución:

a) Para calcular la distancia entre dos puntos usaremos la fórmula:

$d(A , B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(-8 - 2)^2 + (7 - 3)^2} =$

$= \sqrt{100 + 16} = \sqrt{\mathbf{116}}$

b) Para calcular las coordenadas del punto medio usaremos la fórmula:

$M = ((a_1 + b_1) / 2 \ , \ (a_2 + b_2) /2) = ((2 + (-8))/2 , (3 + 7)/2 =$

$= (-6 / 2 , 10 / 2) = \mathbf{(-3 , 5)}$

c) Para realizar la comprobación que nos piden calculemos la distancia de A a M y comprobemos que nos queda:

$d(A , M) = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(m_1 - a_1)^2 + (m_2 - a_2)^2} = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (5 - 3)^2} =$

$= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{\mathbf{29}}$

Tan solo nos queda comprobar que raíz de 29 es la mitad que raíz de 116, comprobémoslo:

$\frac{\sqrt{116}}{2} = \frac{\sqrt{116}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{116}{4}} = \sqrt{29}$ cqd (como queríamos demostrar)

10) Halla la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por A(-2,4) y tiene como vector director $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$

Resolución:

Recuerda, para obtener las ecuaciones de una recta necesitamos un punto (que nos lo dan) y un vector de la recta, que también nos lo dan, en este caso $\vec{v} = (3 , -1)$

Así pues,

Ecuación vectorial, $\mathbf{(x , y) = (-2 , 4) + \lambda(3 , -1)}$

4º ESO – opción B – Ejercicios

Ecuaciones paramétricas, las obtendremos igualando cada una de las coordenadas de la expresión anterior

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x = -2 + \lambda 3} \\ \mathbf{y = \ \ 4 + \lambda(-1)} \end{array}\right\}$$

11) Determina todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2,5) y lleva la dirección de $\vec{v}$ = (4 , 1)

<u>Resolución:</u>

Recuerda, para obtener las ecuaciones de una recta necesitamos un punto (que nos lo dan) y un vector de la recta, que también nos lo dan así pues comenzamos;

Ecuación vectorial, **(x , y) = (–2 , 5) + λ(4 , 1)**

Ecuaciones paramétricas, las obtendremos igualando cada una de las coordenadas de la expresión anterior

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x = -2 + \lambda 4} \\ \mathbf{y = \ \ 5 + \lambda 1} \end{array}\right\}$$

Ecuación continua, la obtendremos despejando λ e igualando,

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{x+2}{4} \\ \lambda = \dfrac{y-5}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \mathbf{\frac{x+2}{4} = \frac{y-5}{1}}$$

Ecuación general, operando y pasando todo a un lado de la ecuación,

$(x + 2) \bullet 1 = (y – 5) \bullet 4$ => $\mathbf{x - 4y + 22 = 0}$

Nota: observa que los coeficientes de la x y de la y son los mismos que los del vector cambiados de orden y uno de ellos de signo

Ecuación explícita, la obtendremos despejando la y de la expresión anterior,

$-4y = -x - 22$ => $\mathbf{y = \frac{1}{4}\,x + \frac{22}{4}}$

Ecuación punto-pendiente, para obtener aplicaremos la fórmula para obtenerla,

$y - a_2 = m\,(x - a_1)$ donde $m = v_2 / v_1$

Así pues, $\mathbf{y - 5 = \frac{1}{4}\,(x + 2)}$

4º ESO – opción B – Ejercicios

Observa que para calcular el ángulo α que forma la recta r con el eje OX tendríamos que

$\operatorname{tg} \alpha = m = v_2 / v_1$

12) ***Halla la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto A(2,8) y lleva la dirección de*** $\vec{v} = (-1\ ,\ 9)$

Resolución:

Para practicar calculemos todas las ecuaciones posibles de la recta. Recuerda, para obtener las ecuaciones de una recta necesitamos un punto (que nos lo dan) y un vector de la recta, que también nos lo dan así pues comenzamos;

Ecuación vectorial, $\mathbf{(x\ ,\ y) = (2\ ,\ 8) + \lambda(-1\ ,\ 9)}$

Ecuaciones paramétricas, las obtendremos igualando cada una de las coordenadas de la expresión anterior

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{2 + \lambda(-1)} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{8 + \lambda 9} \end{aligned}\right\}$$

Ecuación continua, la obtendremos despejando λ e igualando,

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{x-2}{-1} \\ \lambda &= \frac{y-8}{9} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{\frac{x-2}{-1} = \frac{y-8}{9}}$$

Ecuación general, operando y pasando todo a un lado de la ecuación,

$(x - 2) \cdot 9 = (y - 8) \cdot (-1) =$ => $\mathbf{9x + y - 26 = 0}$

Nota: observa que los coeficientes de la x y de la y son los mismos que los del vector cambiados de orden y uno de ellos de signo

Ecuación explícita, la obtendremos despejando la y de la expresión anterior,

$\mathbf{y = -9x + 26}$

Ecuación punto-pendiente, para obtener aplicaremos la fórmula para obtenerla,

$y - a_2 = m\,(x - a_1)$ donde $m = v_2 / v_1$

Así pues, $\mathbf{y - 8 = -9(x - 2)}$

4º ESO – opción B – Ejercicios

Observa que para calcular el ángulo α que forma la recta r con el eje OX tendríamos que

tg $\alpha = m = v_2 / v_1$

13) Indica un punto y un vector de estas rectas

<u>Resolución:</u>

a) $(x , y) = (2 , 4) + \lambda(5 , -3)$

Si nos fijamos nos dan la ecuación vectorial de una recta, es este caso aplicando la definición,

$$(x , y) = \underbrace{(2 , 4)}_{\text{Punto}} + \lambda\underbrace{(5 , -3)}_{\text{vector}}$$

El punto será el A(2 , 4) y el vector $\vec{v} = (5 , -3)$

b) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{2}$

Si nos fijamos nos dan la ecuación continua de una recta, es este caso aplicando la definición,

Coordenadas del punto cambiadas de signo

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{2}$$

Coordenadas del vector

Así pues, el punto será A(3 , –2) y el vector $\vec{v} = (3 , 2)$

c) $\left.\begin{array}{l} x = -1 + 9\lambda \\ y = -8 - 6\lambda \end{array}\right\}$

Si nos fijamos nos dan las ecuaciones paramétricas de una recta, es este caso aplicando la definición,

Coordenadas del punto

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 9\lambda \\ y = -8 - 6\lambda \end{array}\right\}$$

Coordenadas del vector

4º ESO – opción B – Ejercicios

Así pues, el punto será A(–1 , –8) y el vector $\vec{v}$ = (9 , –6)

d) 2x – 3y + 8 = 0

Si nos fijamos nos dan la ecuación general de una recta, es este caso aplicando la definición,

2x – 3y + 8 = 0

Coordenadas del vector, cambiadas de orden y una de ellas de signo

Para el punto daremos un valor a una de la incógnitas y despejaremos y obtendremos la otra, por ejemplo, para y = 0 la x vale –4 , así pues un punto será A(–4 , 0) y un vector será $\vec{v}$ = (3 , 2)

14) Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene como pendiente m = –7

<u>Resolución:</u>

Nos piden todas las formas de una recta y nos dan un punto A(0 , 0) pero no tenemos un vector, pues lo que nos dan es la pendiente. Así pues calculemos primero la ecuación punto-pendiente y a partir de ahí el resto.

Ecuación punto-pendiente, para obtener aplicaremos la fórmula para obtenerla,

$y - a_2 = m(x - a_1)$ donde $m = v_2 / v_1$

Así pues, **y – 0 = –7(x – 0)** =>

Quitando los ceros tendríamos que, **y = –7x** que es la ecuación explícita de la recta

Y pasando todo a un lado de la ecuación, tendríamos **7x + y = 0**, que es la ecuación general de la recta.

Una vez aquí sabemos que el vector $\vec{v}$ = (1 , –7) es un vector director de la recta así pues

Ecuación vectorial, **(x , y) = (0 , 0) + λ(1 , –7)**

Ecuaciones paramétricas, las obtendremos igualando cada una de las coordenadas de la expresión anterior

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{0} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{0} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{-7}) \end{aligned}\right\}$$

4º ESO – opción B – Ejercicios

Ecuación continua, la obtendremos despejando λ e igualando,

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \dfrac{x-0}{1}\\ \lambda = \dfrac{y-0}{-7}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{-7}}$$

15) Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(3 , 0) y Q(0 , –3)

<u>Resolución:</u>

Recuerda, para obtener las ecuaciones de una recta necesitamos un punto (que nos lo dan, en realidad nos dan dos) y un vector de la recta, que no nos lo dan pero que podemos calcular, ¿cómo?, obteniendo las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$

Así pues, $\overrightarrow{PQ}$ = (0 – 3 , –3 – 0) = (–3 , –3)

Ahora procederemos como siempre, tomamos pj el punto P(3,0) y el vector $\overrightarrow{PQ}$ = (–3 , –3)

Ecuación vectorial, **(x , y) = (3 , 0) + λ(–3, –3)**

Ecuaciones paramétricas, las obtendremos igualando cada una de las coordenadas de la expresión anterior

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{x = 3 + \lambda(-3)}\\ \mathbf{y = 0 + \lambda(-3)}\end{array}\right\}$$

Ecuación continua, la obtendremos despejando λ e igualando,

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \dfrac{x-3}{-3}\\ \lambda = \dfrac{y-0}{-3}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{\dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y-0}{-3}}$$

Ecuación general, operando y pasando todo a un lado de la ecuación,

(x – 3) • (–3) = (y – 0) • (–3) => **–3x + 3y + 9 = 0**

Nota: observa que los coeficientes de la x y de la y son los mismos que los del vector cambiados de orden y uno de ellos de signo

Ecuación explícita, la obtendremos despejando la y de la expresión anterior,

3y = 3x – 9 => **y = x – 3**

Ecuación punto-pendiente, para obtener aplicaremos la fórmula para obtenerla,

4º ESO – opción B – Ejercicios

$y - a_2 = m(x - a_1)$ donde $m = v_2 / v_1$

Así pues, $\mathbf{y - 0 = 1\,(x - 3)}$

Observa que para calcular el ángulo α que forma la recta r con el eje OX tendríamos que

$tg\ \alpha = m = v_2 / v_1$

16) ***Dadas las rectas r, determinada por los puntos A(2,3) Y B(4,7) y la recta s, determinada por los puntos C(2,7) y D(7,8), razona si r y s son paralelas.***

Resolución:

Para determinar si son paralelas necesitamos conocer sus vectores pues podemos aplicar el cálculo del ángulo que forman u obtener las ecuaciones generales de las rectas y realizar el cociente de sus coeficientes. En ambos casos lo primero es determinar los vectores.

Así pues, $\overrightarrow{AB} = (4 - 2\ ,\ 7 - 3) = (2\ ,\ 4)$

Así pues, $\overrightarrow{CD} = (7 - 2\ ,\ 8 - 7) = (5\ ,\ 1)$

Como sabemos los coeficientes de la x y de la y en la ecuación general son las coordenadas de los vectores permutadas y cambiada una de ellas de signo con lo que si el cociente entre ellas es igual una vez realizadas las operaciones anteriores, las rectas serán paralelas, ie,

$\frac{4}{1} \neq \frac{-2}{-5}$ Así pues las dos rectas no son paralelas, son secantes

17) ***Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,2) y es paralela a la recta de ecuación 5x + 3y + 7 = 0.***

Resolución:

Para calcular la ecuación de una recta necesitamos un punto y un vector de la misma o dos puntos (a partir de ellos obtendríamos el vector que nos hace falta). Pero en este caso nos piden que sea paralela a otra (con esto ya nos dan la dirección).
Adicionalmente si dos recta son paralelas los cocientes entre los coeficientes de las mismas incógnitas han de ser iguales, en particular, puede ser igual a 1 con lo que la ecuación de la recta pedida puede ser:

$5x + 3y + c = 0$

Con lo que lo único que tenemos que obtener es el término independiente de la ecuación, para ello usaremos el punto que nos dan, ¿cómo?, sustituyendo en la ecuación y despejando,

4º ESO – opción B – Ejercicios

5(1) + 3(2) + c = 0 => 5 + 6 + c = 0 => **c = –11**

Con lo que la ecuación de la recta pedida será 5x + 3y – 11 = 0

18) Estudia si los vectores de las siguientes parejas son perpendiculares entre sí:

a) $\vec{u} = (6 , 9)$ *y* $\vec{v} = (-3 , 2)$

b) $\vec{u} = (2 , 4)$ *y* $\vec{v} = (-8 , -4)$

c) $\vec{u} = (-3 , 6)$ *y* $\vec{v} = (10 , 5)$

d) $\vec{u} = (-1 , -2)$ *y* $\vec{v} = (4 , 2)$

Resolución:

Si dos vectores son perpendiculares al ángulo que forman es de 90º, eso quiere decir que el producto escalar de estos vectores debe ser cero, así pues comprobemos si es cero o no

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 6 \bullet (-3) + 9 \bullet 2 = -18 + 18 = 0$, así pues son perpendiculares

b) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \bullet (-8) + 4 \bullet (-4) = -16 + -16 = -32 \neq 0$, así pues no son perpendiculares

c) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (-3) \bullet 10 + 6 \bullet 5 = -30 + 30 = 0$, así pues son perpendiculares

d) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (-1) \bullet 4 + (-2) \bullet 2 = -4 + (-4) = -8 \neq 0$, así pues no son perpendiculares

19) Calcula el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (a , 3)$ ***y*** $\vec{v} = (-1 , 5)$ ***sean perpendiculares***

Resolución:

Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser cero, así pues

$\vec{u} \bullet \vec{v} = a \bullet (-1) + 3 \bullet 5 = -a + 15 = 0$, así pues con **a = 15** ambos vectores serán perpendiculares

20) Determina un vector cuyo módulo mida $\sqrt{10}$ ***unidades y que sea perpendicular a*** $\vec{v} = (6 , -2)$.

Resolución:

Supongamos que las coordenadas del vector que nos piden son $\vec{u} = (u_1 , u_2)$

Por una parte tenemos que debe ser perpendicular a $\vec{v}$ con lo que su producto escalar debe ser cero,

4º ESO – opción B – Ejercicios

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot (-1) + u_2 \cdot (-2) = -u_1 - 2u_2 = 0$,

Por otra parte sabemos que su módulo vale $\sqrt{10}$ con lo que aplicando la fórmula del módulo de un vector tenemos que:

$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{10} \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 = 10$, así pues tenemos que, juntando las dos ecuaciones, tenemos un sistema no lineal que al resolver tendremos la solución,

$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = 10 \\ -u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases}$$

Despejando de la segunda ecuación $u_1 = -2u_2$ y sustituyendo en la primera

$(-2u_2)^2 + u_2^2 = 10 \Rightarrow 4u_2^2 + u_2^2 = 10 \Rightarrow 5u_2^2 = 10 \Rightarrow u_2^2 = 2 \Rightarrow u_2 = \sqrt{2}$

Ahora sustituyendo tendremos el valor de u_1

$u_1 = -2\sqrt{2} \Rightarrow$ Así pues tenemos que $\vec{u} = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Para ver la que solución es correcta podemos comprobar que el módulo es $\sqrt{10}$ y que el producto escalar de los vectores es cero.

21) Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices A(2 , 1), B(2 , 5) y C(–2 , 3)

<u>Resolución:</u>

Para hallar las coordenadas de los puntos medios aplicaremos la fórmula correspondiente.

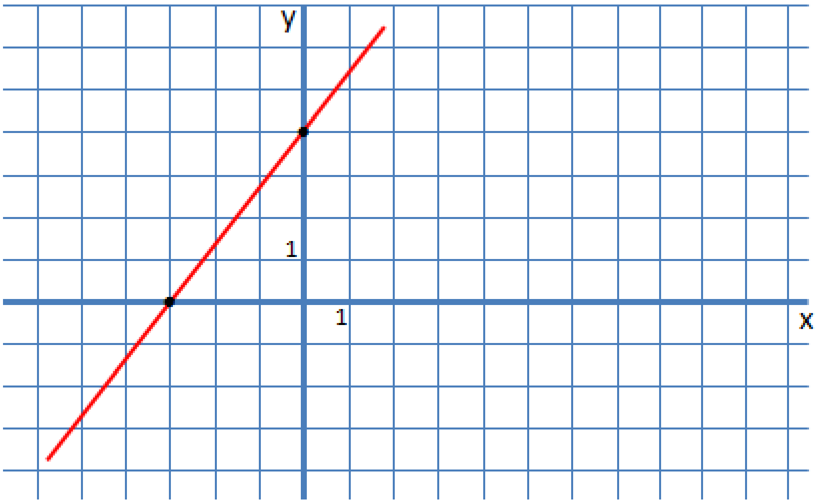
$M(A, B) = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = \mathbf{(2, 3)}$

$M(A, C) = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \mathbf{(0, 2)}$

$M(B, C) = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = \mathbf{(0, 4)}$

4º ESO – opción B – Ejercicios

22) Halla todas las formas de la ecuación de la recta de la figura.



Resolución:

Recuerda, para obtener las ecuaciones de una recta necesitamos un punto (que nos lo dan) y un vector de la recta, que en este caso no nos lo dan y que tendremos que averiguar.
Lo que si nos dan es otro punto de la recta, si te fijas, la recta pasa, entre otros, por los puntos A(–3 , 0) y B(0 , 4), así pues podemos calcular el vector $\overrightarrow{AB}$ con lo que tendríamos ya un punto y un vector.

$\overrightarrow{AB} = (0-(-3), 4-0) = (3, 4)$

Con todo esto y cogiendo el punto A(–3 , 0) (podríamos haber elegido el punto B también)

Ecuación vectorial, $\mathbf{(x, y) = (-3, 0) + \lambda(3, 4)}$

Ecuaciones paramétricas, las obtendremos igualando cada una de las coordenadas de la expresión anterior

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{x = -3 + \lambda 3}\\ \mathbf{y = \ \ 0 + \lambda 4}\end{array}\right\}$$

Ecuación continua, la obtendremos despejando λ e igualando,

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \dfrac{x+3}{3}\\ \lambda = \dfrac{y-0}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{\frac{x+3}{3} = \frac{y-0}{4}}$$

Ecuación general, operando y pasando todo a un lado de la ecuación,

$(x + 3) \cdot 4 = (y - 0) \cdot 3 \Rightarrow \mathbf{4x - 3y + 12 = 0}$

4º ESO – opción B – Ejercicios

Nota: observa que los coeficientes de la x y de la y son los mismos que los del vector cambiados de orden y uno de ellos de signo

Ecuación explícita, la obtendremos despejando la y de la expresión anterior,

$-3y = -4x - 12 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{4}{3}x + \frac{12}{3}}$

Ecuación punto-pendiente, para obtener aplicaremos la fórmula para obtenerla,

$y - a_2 = m(x - a_1)$ donde $m = v_2 / v_1$

Así pues, $\mathbf{y - 0 = \frac{4}{3}(x + 3)}$

Observa que para calcular el ángulo α que forma la recta r con el eje OX tendríamos que

$\text{tg}\ \alpha = m = v_2 / v_1$

23) Expresa en forma continua la recta y = 2x + 1.

<u>Resolución:</u>

Para hallar la ecuación continua de una recta, podemos proceder de dos maneras. O despejar de la que nos dan y obtener la ecuación u obtener un punto y un vector y aplicar la fórmula.

Procederemos de esta segunda forma. Como nos dan la ecuación explícita de la recta podemos obtener dos puntos dando valores. Por ejemplo,

Para x = 0 , y = 2•0 + 1 = 1, así pues pasa por el punto A(0 , 1)
Para x = 1 , y = 2•1 + 1 = 3, así pues pasa por el punto B(1 , 3)

Con dos puntos podemos calcular el vector que los une, $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = (1 - 0 , 3 - 1) = (1 , 2)$

Finalmente aplicamos la definición de ecuación continua, para el punto A y el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\mathbf{\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{3}}$$

4º ESO – opción B – Ejercicios

24) ***Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y, si son secantes, hala su punto de corte.***
   a) ***r: 2x – 5y + 7 = 0***
      s: x – 2y – 2 = 0
   b) ***r: 6x + 4y – 12 = 0***
      s: 3x + 2y – 6 = 0
   c) ***r: x – 5y + 3 = 0***
      s: 3x – 15y + 8 = 0

Resolución:

Para todos los casos tendremos que comprobar cómo son los cocientes de los coeficientes de las incógnitas y del término independiente.

a) Comprobamos los cocientes,
   Primero de las incógnitas $\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{-2}$ así pues en este caso son **dos rectas secantes**, que resolviendo el sistema nos da como punto de corte,
   x = 24 e y = 11

b) Comprobamos los cocientes,
   Primero de las incógnitas $\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$, como son iguales comprobamos con el cociente de los términos independientes, $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{-12}{-6}$
   Así pues en este caso son **dos rectas coincidentes**, es decir, son la misma recta.

c) Comprobamos los cocientes,
   Primero de las incógnitas $\frac{1}{3} = \frac{-5}{-15}$, como son iguales comprobamos con el cociente de los términos independientes, $\frac{1}{3} = \frac{-5}{-15} \neq \frac{3}{8}$
   Así pues en este caso son **dos rectas paralelas.**

25) ***Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto A(–2 , 4) y es paralela a la que tiene por ecuación 7x – 14y + 3 = 0.***

Resolución:

Para calcular la ecuación de una recta necesitamos un punto y un vector de la misma o dos puntos (a partir de ellos obtendríamos el vector que nos hace falta). Pero en este caso nos piden que sea paralela a otra (con esto ya nos dan la dirección).
Adicionalmente si dos recta son paralelas los cocientes entre los coeficientes de las mismas incógnitas han de ser iguales, en particular, puede ser igual a 1 con lo que la ecuación de la recta pedida puede ser:

4º ESO – opción B – Ejercicios

5x + 3y + c = 0

Con lo que lo único que tenemos que obtener es el término independiente de la ecuación, para ello usaremos el punto que nos dan, ¿cómo?, sustituyendo en la ecuación y despejando,

7(–2) – 14(4) + c = 0 => –14 – 56 + c = 0 => **c = 70**

Con lo que la ecuación de la recta pedida será 7x – 14y +70 = 0

26) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de r: 8x – 5y + 2 = 0 y s: 2x + y – 4 = 0, y por el punto A(0 , 3)

Resolución:

Para calcular la ecuación de una recta necesitamos un punto y un vector de la misma o dos puntos (a partir de ellos obtendríamos el vector que nos hace falta).
En este caso nos dan un punto A(0 , 3) y el otro lo podremos calcular resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las rectas r y s.

Así pues resolviendo el sistema,

$$\begin{cases} r: 8x - 5y + 2 = 0 \\ s: 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Nos da como solución, x = 1 e y = 2,

Así pues nos piden la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(0 , 3) y B(1 , 2)

Ahora lo primero será calcular el vector $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}$ = (1 – 0 , 2 – 3) = (1 , –1)

Finalmente aplicamos la definición, por ejemplo, de ecuación continua, para el punto A y el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\frac{\mathbf{x-0}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{y-3}}{\mathbf{-1}}$$

Que despejando, obtendremos la ecuación general:

–x – y + 3 = 0 ó x + y – 3 = 0