# T3. Funciones. Ejercicios

## 1. Cálculo de derivadas

1. a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=(-7+x^2)^3\cdot e^{5-x} \qquad g(x)=\frac{\ln(x^4-2x^2)}{8-x^3}$$

2. a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \qquad g(x)=x^3\cdot e^{2x^2}$$

3. a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=(5x^3+4x-2)^4\cdot\ln\left(2x^5-4x^3+x\right) \qquad g(x)=\frac{e^{3x^2-5x}}{(6x^2+2)^3}$$

4. a) (1'2 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones

$$f(x)=(-5+x^2)^2\cdot e^{3x} \qquad g(x)=\frac{\ln(x^3-5x)}{1-x^2}$$

---

5. a) (1'2 puntos) Calcule la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln(3x^2-3)+\frac{1-2x}{x+2} \qquad g(x)=2e^{x^3}+x^2(3x+4)^3$$

## 2. Continuidad y derivabilidad. Asíntotas

6. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3+2x^2-3 & si \quad x\le 1 \\ 1+\dfrac{1}{x-2} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de $f$. Si la función no es continua en algún punto, indique el tipo de discontinuidad que presenta.
b) Estudie la derivabilidad de *f*.
c) Determine las asíntotas de *f*.

7. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & si \quad 0\le x\le 2 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f*.

8. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+4 & si \quad x<3 \\ -x+4 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en todos los puntos de su dominio.

9. a) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 6x-3 & si \quad x\le 1 \\ ax^2+bx+2 & si \quad x>1 \end{cases}$

con *a* y *b* números reales. Determine los valores de *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en todo su dominio.

## 3. Cálculo de la recta tangente

10. a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x=0$

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{-3x+7} \qquad g(x)=\ln\left(\frac{1}{3x+1}\right)$$

11. Se considera la función $f(x)=3x^3-6x^2+5$

a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a *f* que sean paralelas a la recta $y=-3x+1$

12. b) (1'3 puntos) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las funciones $h(x)=x^2+1$ y $p(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, en el punto de abscisa $x=1$. ¿En qué punto se cortan ambas rectas?

## 4. Cálculo de parámetros

13. a) Se considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, con *a*, *b* y *c* números reales. Calcule los valores *a*, *b* y *c*, sabiendo que la gráfica de *f* posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $P(0,18)$ es $-3$.

14. a) Se considera la función $f(x)=x^3+bx^2+cx-1$ donde *b* y *c* son números reales. Determine el valor de *b* y *c* para que la función *f* presente un extremo relativo en el punto de abscisa $x=\dfrac{1}{3}$ y además la gráfica de la función *f* pase por el punto $(-2,-3)$.

15. Se considera la función $f(x)=ax^3+bx+4$, con *a* y *b* números reales.

a) (1 Punto) Determine los valores de *a* y *b* para que *f* tenga un extremo relativo en el punto $(2,36)$.

16. a) (1'2 puntos) Se considera la función $f(x)=ax^2+bx+3$. Calcule los valores *a* y *b*, sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto $(2,3)$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en dicho punto es $m=-2$.

17. Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$.

a) Halle *a* y *b* de forma que *f* tenga un extremo relativo en $x=1$ y la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=0$ tenga pendiente $m=-1$.

## 5. Monotonía, curvatura y gráficas

18. **Sea la función** $f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3},\ t\geq 0.$

**a) Representa gráficamente la función *f*, determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y curvatura de *f*.**

**b) Si la función *f* representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde *t* indica los años de vida de la empresa:**

**b.1)¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?. Justifique la respuesta**

**b.2) A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios?. En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?.**

19. **Se considera la función** $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$

**a) Determine el dominio de la función y estudie su monotonía y curvatura.**

**b) Calcule las ecuaciones de las asíntotas de *f* si existen. Calcule los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes de coordenadas.**

**c) Represente la gráfica de la función *f*.**

# 6. Integrales y áreas

20. Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

a) Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de *f* y su curvatura.

b) Represente gráficamente la función *f*.

c) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

21. b) Calcule las integrales definidas siguientes:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{5}{3x^4}\,dx \qquad \int_{-3}^{0} \frac{e^{\frac{x}{3}}}{5}\,dx$$

22. b) Represente gráficamente la región acotada comprendida entre la recta $y = -2x + 6$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$ y calcule su área.

23. b) Represente gráficamente la función $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$ y calcule el área de la región acotada, limitada por la gráfica de dicha función y el eje de abscisas.

24. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & si \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f*.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo de la función y represente gráficamente la función.

25. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & si \quad x < 3 \\ -x + 4 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en todos los puntos de su dominio.

b) Represente gráficamente *f*.

c) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$

26. b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ y el eje de abscisas.

27. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} a(x+1)^2 & si \quad -3 \le x \le 1 \\ \dfrac{bx^2}{2} + 2 & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ con *a* y *b* números reales.

a) Determine los valores de *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable.

b) Para $a = 1$ y $b = 2$, esboce la gráfica de la función *f* y calcule el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

## 7. Problemas

28. Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día. La función $v(t)$ nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo *t*, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $v(t)$ se conoce que su variación instantánea es:

$$v'(t) = t^2 - 5t + 6 \qquad t \in [0,6]$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *v*

b) Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0) = 10$, halle la función *v*.

c) Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante $t = 2$ y posteriormente las vendió en el instante $t = 4$, indique a cuánto ascendió la ganancia o la perdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima?. Justifique la respuesta.

29. La temperatura en el interior de un equipo de refrigeración durante un día que sufrió un corte de energía viene dada por la función *f* expresada en grados centígrados y el tiempo *t* en horas:

$$f(t) = \begin{cases} -9 & si \quad 0 \le t \le 1 \\ -t^2 + 12t - 20 & si \quad 1 < t < 11 \\ -9 & si \quad 11 \le t \le 24 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de $f$.

b) Represente gráficamente la función.

c) Conteste razonadamente a qué hora se produjo el corte de energía y cuánto duró dicho corte.

d) El equipo de refrigeración se utiliza para conservar sueros y vacunas. Los sueros se estropean si se alcanzan temperaturas de 20ºC en algún momento. Las vacunas se estropean si están por encima de 0ºC durante más de seis horas. Razone si alguno de esos productos se estropeó ese día.

30. La función $B(t) = -t^2 + 21t - 20$ con $0 \le t \le 15$ representa el beneficio, en miles de euros, de una empresa en función de los años, *t*.

a) Si la función $I(t) = -t^2 + 48t$ representa los ingresos de esta empresa, en miles de euros, para el mismo intervalo de tiempo, ¿cuál es la función de gastos de dicha empresa? ¿Cuáles son los gastos iniciales?.

b) Calcule el momento a partir del cual el beneficio fue positivo.

c) Calcule en qué momento el beneficio fue máximo y el valor del mismo.

d) Represente gráficamente la función beneficio.