Tema 7: Derivadas de Funciones

1. Reglas de derivación

1. Constante: $f(x)=k$ $\quad f'(x)=0$
2. Potencia: $f(x)=x^n$ $\quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
3. Suma – diferencia:
4. Producto:
5. Cociente:

$$f(x)=u^n \qquad f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$$
$$f(x)=u\pm v \qquad f'(x)=u'\pm v'$$
$$f(x)=u\cdot v \qquad f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$
$$f(x)=\frac{u}{v} \qquad f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Ejemplos:

$$f(x)=x^3+3x^2+4 \qquad f'(x)=3x^2+3\cdot 2\cdot x^1+0 \;=\; 3x^2+6x$$

Potencias

$$f(x)=\underbrace{(x^3+3x^2+4)}_{u}{}^{3} \qquad f'(x)=\underbrace{3}_{n}\cdot\underbrace{(x^3+3x^2+4)^2}_{u^{n-1}}\cdot\underbrace{(3x^2+6x)}_{u'}$$

Los resultados se simplifican si hay sumas o restas, o si se puede sacar factor común

$$f(x)=(x^2+2)^2 \qquad f'(x)=2\cdot(x^2+2)^1\cdot(2x)=4x(x^2+1)$$

$$f(x)=(-x-2)^4 \qquad f'(x)=4\cdot(-x-2)^3\cdot(-1)=-4(-x-2)^3$$

Ejemplos:

Productos:

$$f(x)=\underbrace{(-x-2)}_{u}\cdot\underbrace{(x^2+3x)}_{v}$$

$$f'(x)=\underbrace{(-1)}_{u'}\cdot\underbrace{(x^2+3x)}_{v}+\underbrace{(-x-2)}_{u}\cdot\underbrace{(2x+3)}_{v'}=$$

hay una suma, debemos simplificar

$$f'(x)=(-x^2-3x)+(-2x^2-3x-4x-6)=-3x^2-10x-6$$

$$f(x)=\underbrace{(2x^2-2x)}_{u}\cdot\underbrace{(2x^2+2x^3)}_{v}$$

$$f'(x)=\underbrace{(4x-2)}_{u'}\cdot\underbrace{(2x^2+2x^3)}_{v}+\underbrace{(2x^2-2x)}_{u}\cdot\underbrace{(4x+6x^2)}_{v'}=$$

$$f'(x)=(8x^3+8x^4-4x^2-4x^3)+(8x^3+12x^4-8x^2-12x^3)=$$

$$=20x^4-12x^2$$

$$f(x)=\underbrace{(2x+1)^3}_{u^n}\cdot\underbrace{(x-2)}_{v}$$

hay que aplicar la regla del producto y la de la potencia

$$n\cdot u^{n-1}\cdot u'\cdot v+u^n\cdot v'$$

$$f'(x)=3(2x+1)^2\cdot(2)\cdot(x-2)+(2x+1)^3\cdot(1)=$$

hay una suma, pero primero sacamos factor común

$$=(2x+1)^2\cdot[3\cdot 2\cdot(x-2)+(2x+1)\cdot 1]=(2x+1)^2(8x-11)$$

los productos no se hacen

Cocientes:

$$f(x)=\frac{3x}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3\cdot(2x+1)^2-3x\cdot 2\cdot(2x+1)^1\cdot 2}{(2x+1)^4}=$$

hay una resta, pero primero sacamos factor común

$$=\frac{(2x+1)\cdot[3\cdot(2x+1)-3x\cdot 2\cdot 2]}{(2x+1)^4}=\frac{6x+3-12x}{(2x+1)^3}=\frac{-6x+3}{(2x+1)^3}$$

Ejemplos:

Cocientes:

$$f(x)=\frac{3}{(2x+1)^2} \qquad f'(x)=\frac{0\cdot(2x+1)^2-3\cdot 2\cdot(2x+1)^1\cdot 2}{(2x+1)^4}=\frac{-12}{(2x+1)^3}$$

$$f(x)=\frac{(2x+1)^2}{3} \qquad f'(x)=\frac{2\cdot(2x+1)^1\cdot(2)\cdot 3-0\cdot(2x+1)^2}{(3)^2}=\frac{4(2x+1)}{3}$$

Observando el último ejemplo podemos obtener tres subreglas muy útiles:

4.1. $f(x)=k\cdot u \qquad f'(x)=k\cdot u'$

5.1. $f(x)=\frac{u}{k} \qquad f'(x)=\frac{u'}{k}$

5.2. $f(x)=\frac{k}{u} \qquad f'(x)=\frac{-k\cdot u'}{u^2}$

1. Reglas de derivación

6. Radicales:

$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)=\sqrt[n]{x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$f(x)=\sqrt{u}$ $\quad f'(x)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f(x)=\sqrt[n]{u}$ $\quad f'(x)=\dfrac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

Ejemplos:

$f(x)=\sqrt[4]{x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

7. Exponenciales:

$f(x)=e^x$ $\quad f'(x)=e^x$

$f(x)=k^x$ $\quad f'(x)=k^x\cdot\ln k$

$f(x)=e^u$ $\quad f'(x)=e^u\cdot u'$

$f(x)=k^u$ $\quad f'(x)=k^u\cdot u'\cdot\ln k$

Ejemplos:

$f(x)=10^x$ $\quad f'(x)=10^x\cdot\ln 10$

$f(x)=e^{x^2+x}$ $\quad f'(x)=e^{x^2+x}\cdot(2x+1)$

8. Logarítmicas:

$f(x)=\ln x$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$f(x)=\log_k x$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln k}$

$f(x)=\ln u$ $\quad f'(x)=\dfrac{u'}{u}$

$f(x)=\log_k u$ $\quad f'(x)=\dfrac{u'}{u\cdot\ln k}$

Ejemplos:

$f(x)=\log_2 x$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot ln 2}$

$f(x)=\ln(x^2+x)$ $\quad f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

Ejemplos:

$$f(x)=\sqrt{3x-2} \qquad f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{3x-2} \qquad f'(x)=\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}}$$

$$f(x)=e^{3x-2} \qquad f(x)=e^{3x-2}\cdot 3 \;=\; 3\cdot e^{3x-2}$$

$$f(x)=3^{3x-2} \qquad f(x)=3^{3x-2}\cdot 3\cdot \ln 3 \;=\; 3\cdot \ln 3\cdot e^{3x-2}$$

$$f(x)=\ln(3x-2) \qquad f'(x)=\frac{3}{3x-2}$$

$$f(x)=\log(3x-2) \qquad f'(x)=\frac{3}{(3x-2)\cdot \ln 10}$$

$$f(x)=\underbrace{\sqrt{3x-2}}_{u}\cdot\underbrace{(3x-2)}_{v}$$

regla del producto

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\cdot(3x-2)+\sqrt{3x-2}\cdot(3)=$$

denominador común

$$=\frac{3\cdot(3x-2)+\left(\sqrt{3x-2}\right)^2\cdot 3\cdot 2}{2\sqrt{3x-2}}=\frac{9x-6+18x-12}{2\sqrt{3x-2}}=\frac{27x-18}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$f(x)=\frac{e^{3x-2}}{3x-2}$$

regla del cociente

$$f'(x)=\frac{e^{3x-2}\cdot 3\cdot(3x-2)-e^{3x-2}\cdot(3)}{(3x-2)^2}=$$

factor común

$$=\frac{e^{3x-2}\cdot[9x-6-3]}{(3x-2)^2}=\frac{e^{3x-2}(9x-9)}{(3x-2)^2}$$

Ejemplos:

$$f(x)=e^{\frac{3x-2}{x-2}}$$

e^u

$e^u \cdot u'$

u' : regla del cociente

$$f'(x)=e^{\frac{3x-2}{x-2}}\cdot\frac{3\cdot(x-2)-(3x-2)(1)}{(x-2)^2}=$$

operaciones en el numerador

$$=e^{\frac{3x-2}{x-2}}\cdot\frac{3x-6-3x+2}{(x-2)^2}=e^{\frac{3x-2}{x-2}}\cdot\frac{-4}{(x-2)^2}$$

$$f(x)=\underbrace{\sqrt{3x-2}}_{u}\cdot\underbrace{\ln(3x-2)}_{v}$$

regla del producto

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\cdot\ln(3x-2)+\sqrt{3x-2}\cdot\frac{3}{3x-2}=$$

denominador común

$$=\frac{3\cdot\ln(3x-2)\cdot\sqrt{3x-2}+2\cdot\sqrt{3x-2}\cdot 3}{2(3x-2)}=$$

factor común

$$=\frac{\sqrt{3x-2}\cdot[3\cdot\ln(3x-2)+2\cdot 3]}{2(3x-2)}=\frac{3\cdot\ln(3x-2)+6}{2\sqrt{3x-2}}$$

1. Reglas de derivación

9. Trigonométricas:

$f(x)=sen\,x \qquad f'(x)=\cos x$

$f(x)=\cos x \qquad f'(x)=-sen\,x$

$f(x)=tg\,x \qquad f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f(x)=sen\,u \qquad f'(x)=\cos u\cdot u'$

$f(x)=\cos u \qquad f'(x)=-sen\,u\cdot u'$

$f(x)=tg\,u \qquad f'(x)=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

Ejemplos:

$f(x)=sen(3x+x^3) \qquad f'(x)=\cos(3x+x^3)\cdot(3+3x^2)$

tema 1

$f(x)=sen\,x\cdot\cos x \qquad f'(x)=\cos x\cdot\cos x-sen\,x\cdot sen\,x\cos^2 x-sen^2 x=\cos(2x)$

$f(x)=\dfrac{sen\,x}{e^x} \qquad f'(x)=\dfrac{\cos x\cdot e^x-sen\,x\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x[\cos x-sen\,x]}{e^{2x}}=\dfrac{\cos x-sen\,x}{e^x}$

10. Trigonométricas inversas:

$f(x)=arc\,sen\,x \qquad f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)=arc\cos x \qquad f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)=arc\,tg\,x \qquad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x)=arc\,sen\,x \qquad f'(x)=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$f(x)=arc\cos x \qquad f'(x)=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

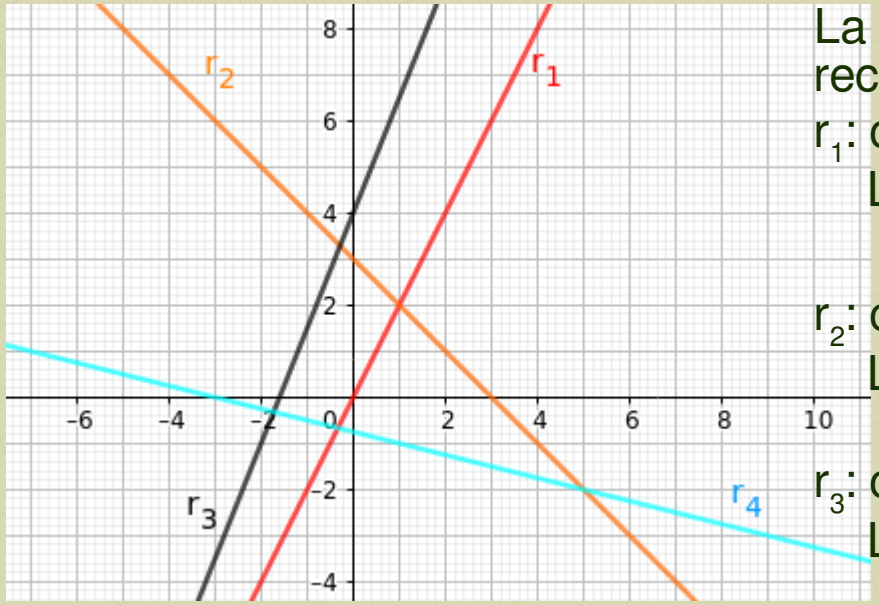
$f(x)=arc\,tg\,x \qquad f'(x)=\dfrac{u'}{1+u^2}$

Ejemplos:

$f(x)=arc\,tg\dfrac{1}{x} \qquad f'(x)=\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\dfrac{-1}{x^2+1}$

2. Interpretación gráfica de la derivada

Recordatorio: pendiente de una recta



La pendiente mide con qué velocidad sube o baja una recta

r_1: cada avance de 1 en x , supone una subida de 2 en y .
La pendiente es $m_1=\frac{2}{1}=2$

r_2: cada avance de 1 en x , supone una bajada de 1 en y .
La pendiente es $m_2=-\frac{1}{1}=-1$

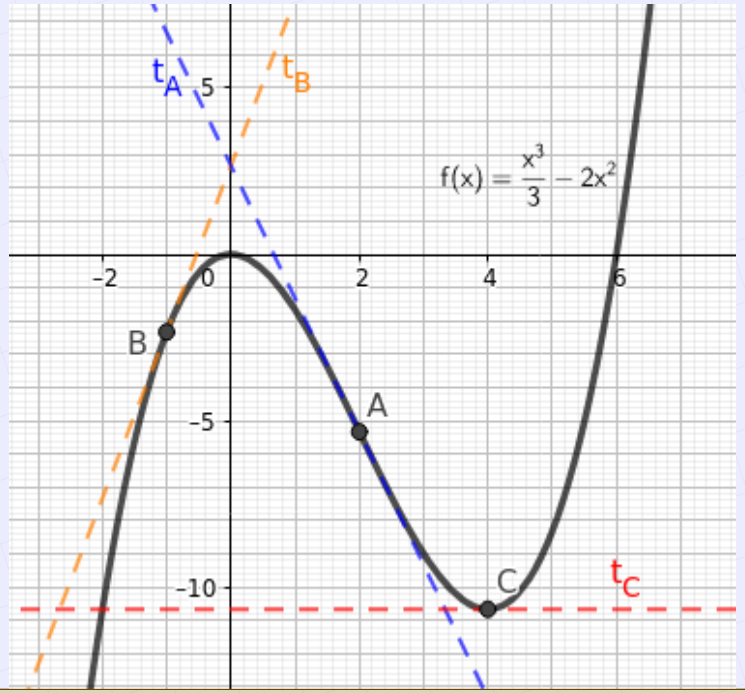
r_3: cada avance de 2 en x , supone una subida de 5 en y .
La pendiente es $m_3=+\frac{5}{2}$

r_4: cada avance de 4 en x , supone una bajada de 1 en y . La pendiente es $m_4=-\frac{1}{4}$

2.1. Recta tangente a una curva

En una gráfica, en cada punto se puede trazar su tangente. Punto *A(a , f(a))*

La **derivada** de la función en cada punto es la **pendiente** de la tangente $\boxed{f'(a)=m_a}$



$$f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x)=x^2-4x$$

Recta tangente en el punto A. Pendiente: $m_a=f'(a)=-4$

Recta tangente en el punto B. Pendiente: $m_b=f'(b)=5$

Recta tangente en el punto C. Pendiente: $m_c=f'(c)=0$

¿En qué puntos de la curva la pendiente vale 5?

$$f'(x)=5 \quad \rightarrow \quad x^2-4x=5 \quad \rightarrow \quad x=-1 \ , \ x=5$$

Ecuación de la recta tangente: ecuación punto – pendiente:

La ecuación punto-pendiente de una recta se obtiene sabiendo un punto $A(a_1 , a_2)$ y la pendiente m :

$$y-a_2=m\cdot(x-a_1)$$

En una curva f(x), la ecuación de la recta tangente a esa curva en un punto A(a, f(a)) es:

$$\boxed{t_a \ : \ y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)}$$

Recta tangente a f que pasa por A:

$$A\left(2,-\frac{16}{3}\right) \qquad f'(2)=-4 \qquad t_A: y+\frac{16}{3}=-4(x-2) \qquad \boxed{y=-4x+\frac{8}{3}}$$

Ejemplos:

1) $f(x)=x^2-4x$

- Calcular la recta tangente a la curva en el punto de abcisa x = –2

Usamos la fórmula de la recta tangente: $f'(x)=2x-4$, $f(-2)=4$, $f'(-2)=-8$

$$y-4=-8(x+2)$$
$$\boxed{y=-8x-12}$$

- Calcular los puntos de la parábola en los que la pendiente sea 1

Pendiente sea 1: $f'(x)=1 \rightarrow 2x-4=1 \rightarrow x=\frac{5}{2}$

$$y=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{-15}{4}$$

Punto: $P\left(\frac{5}{2},-\frac{15}{4}\right)$

- Calcular los puntos de la parábola en los que la tangente sea paralela a la recta *y = 2x + 4*

Tangente paralela a y = 2x+4 $\rightarrow$ Pendiente sea 2:

$f'(x)=2 \rightarrow 2x-4=2 \rightarrow x=3$

$$y=f(3)=-3$$

Punto: $Q(3,-3)$

2) $g(x)=x^2-bx$

- Calcular *b* para que la recta tangente a la curva en el punto de abcisa *x = –2* tenga pendiente 4

$f'(x)=2x-b$ Pendiente sea 4: $f'(-2)=4 \rightarrow 2\cdot(-2)-b=4 \rightarrow b=-8$

- Calcular *b* para que la parábola tenga el vértice en *x = 5*

Vértice: Pendiente sea 0:

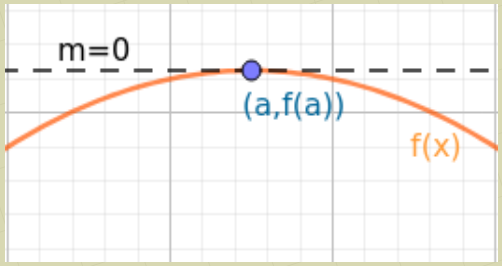
$f'(5)=0 \rightarrow 2\cdot(5)-b=0 \rightarrow b=10$

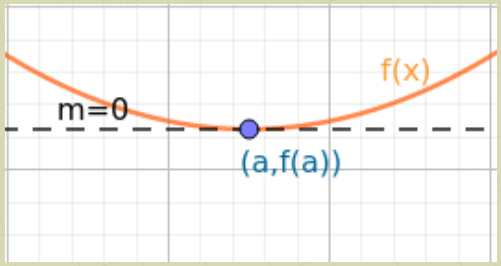
2.2. Puntos singulares de una función

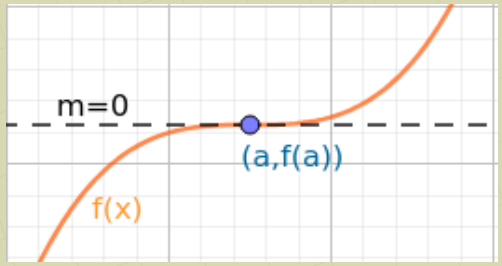
Son puntos de la gráfica en los que la tangente es horizontal, o sea, puntos en los que la derivada vale 0:

$$\boxed{m_a = f'(a) = 0}$$

Estos puntos pueden ser máximos , mínimos , o puntos de inflexión







Para decidir de qué tipo es un punto singular se pueden usar dos métodos:

1. Signo de la derivada en los intervalos adyacentes al punto.
2. Signo de la segunda derivada en el punto:

Punto singular: $f'(a)=0$

$$\begin{cases} \text{Si } f''(a)<0 \rightarrow \text{es un máximo} \\ \text{Si } f''(a)>0 \rightarrow \text{es un mínimo} \\ \text{Si } f''(a)=0 \rightarrow \text{es un punto de inflexión} \end{cases}$$

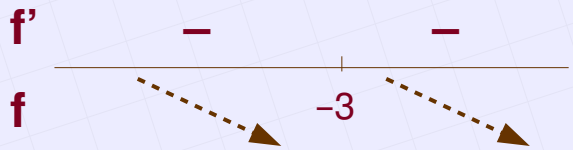
Ejemplos: Buscar puntos singulares y decidir de qué tipo son.

1. $f(x)=-(x+3)^3+5$

Hacemos la derivada e igualamos a 0: $f'(x)=-3(x+3)^2\cdot 1+0$ $\quad f'(x)=0 \rightarrow x=-3$

Solo hay un punto singular. Veamos de qué tipo:

Método 1: $Dom(f)=\mathbb{R}$



x = –3 no es ni máximo ni mínimo: es punto de inflexión (por descarte).

Punto *(–3 , 5)*

Método 2: Hacemos la derivada segunda y sustituimos

$f''(x)=-6(x+3)^1\cdot 1+0$ $\quad f''(-3)=0 \rightarrow$ Punto de inflexión

Este método parece mucho mejor, pero hay que tener en cuenta que a veces es muy complicado hacer la segunda derivada

Ejemplos: Buscar puntos singulares y decidir de qué tipo son.

2. $f(x)=(x^2+1)e^x$

Hacemos la derivada e igualamos a 0: $f'(x)=2xe^x+(x^2+1)e^x=e^x(x^2+2x+1)$ $\quad f'(x)=0 \rightarrow x=-1$

Solo hay un punto singular. Veamos de qué tipo:

Método 1: $Dom(f)=\mathbb{R}$

f'	+		+
f	↗	−1	↗

x = −1 no es ni máximo ni mínimo: es punto de inflexión (por descarte).

Punto *(−1 , 2/e)*

Método 2: Hacemos la derivada segunda y sustituimos

$$f''(x)=e^x(x^2+2x+1)+e^x(2x+2)=e^x(x^2+4x+3)$$

$f'(-1)=0 \rightarrow$ Punto de inflexión

3. $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2-x}$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-x)-(x^2-2)(2x-1)}{(x^2-x)^2}=\frac{-x^2+4x-2}{(x^2-x)^2} \qquad f'(x)=0 \rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$$

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\ ,\ 1\}$

f'	−		+		+		−	
f	↘	0	↘	2-√2	↗	1	↗	2+√2	↘
				mínimo				*máximo*

4. $f(x)=sen\,x-\cos x \quad x\in[0\ ,\ 2\pi)$

$$f'(x)=\cos x+sen\,x \qquad f'(x)=0 \rightarrow \cos x=-sen\,x \rightarrow 1=\frac{-sen\,x}{\cos x}=-tg\,x$$

$$tg\,x=-1 \rightarrow x=135^o\ ,\ 315^o \qquad x=\frac{3\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{4}$$

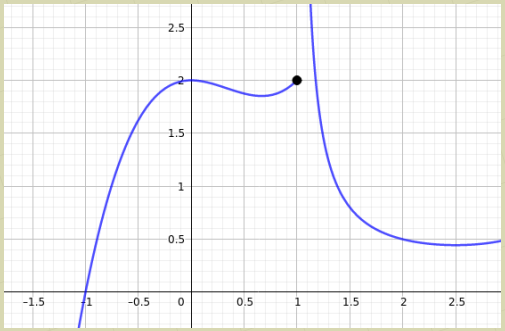
$$f''(x)=-sen\,x+\cos x \qquad f''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}<0 \rightarrow \text{Máximo}$$

$$f''\left(\frac{7\pi}{4}\right)=+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=+\sqrt{2}>0 \rightarrow \text{Mínimo}$$

3. Continuidad y derivabilidad de funciones “a trozos”

Discontinuidades:

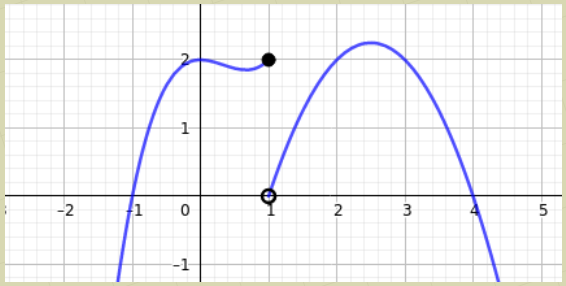
$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+2\ , & si\ x<1 \\ 2\ , & si\ x=1 \\ \dfrac{1}{-x^2+5x-4}, & si\ x>1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} f(1^-)=2 \\ f(1)=2 \\ f(1^+)=+\infty \end{cases}$$

f es discontinua en *x = 1*
discontinuidad salto infinito

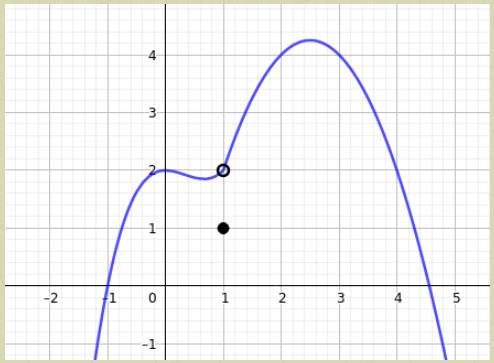
$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+2\ , & si\ x\leq 1 \\ -x^2+5x-4\ , & si\ x>1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} f(1^-)=2 \\ f(1)=2 \\ f(1^+)=0 \end{cases}$$

f es discontinua en *x = 1*
discontinuidad salto finito

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+2\ , & si\ x<1 \\ 1\ , & si\ x=1 \\ -x^2+5x-2, & si\ x>1 \end{cases}$$



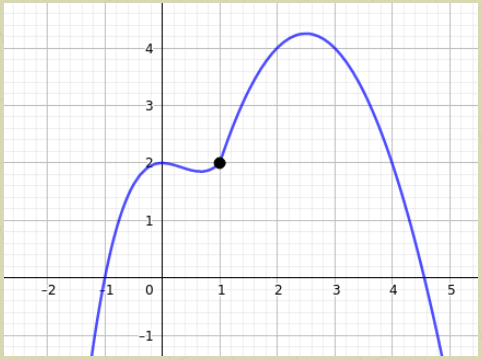
$$\begin{cases} f(1^-)=2 \\ f(1)=1 \\ f(1^+)=2 \end{cases}$$

f es discontinua en *x = 1*
discontinuidad evitable

donde la función no es continua, no puede ser derivable

Continuidad y derivabilidad: Si la función es continua en un punto, puede ser derivable, o no

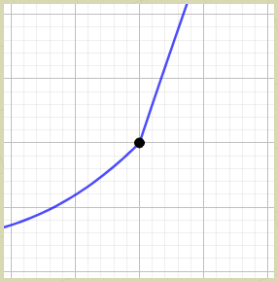
$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+2\ ,\ si\ x<1 \\ 2\ ,\ si\ x=1 \\ -x^2+5x-2, si\ x>1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} f(1^-)=2 \\ f(1)=2 \\ f(1^+)=2 \end{cases}$$

f es continua en *x = 1*

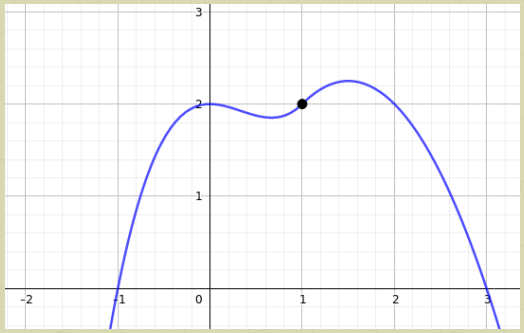
$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2x\ ,\ si\ x<1 \\ -2x+5\ ,\ si\ x>1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} f'(1^-)=1 \\ f'(1^+)=3 \end{cases}$$

f no es derivable en *x = 1*

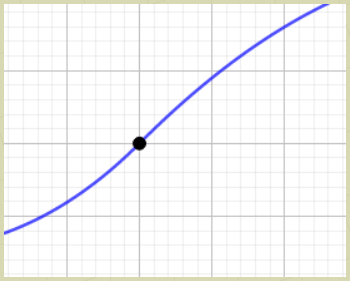
$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+2\ ,\ si\ x<1 \\ 2\ ,\ si\ x=1 \\ -x^2+3x, si\ x>1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} f(1^-)=2 \\ f(1)=2 \\ f(1^+)=2 \end{cases}$$

f es continua en *x = 1*

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2x\ ,\ si\ x<1 \\ -2x+3\ ,\ si\ x>1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} f'(1^-)=1 \\ f'(1^+)=1 \end{cases}$$

f es derivable en *x = 1*

Ejercicios:

Estudiar la continuidad y derivabilidad en los puntos de ruptura

1. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } 0<x<1 \\ x^2-2x & \text{si } 1\le x \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 0 \\ 1 & \text{si } 0<x<3 \\ -x^2+3x+2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x<2 \\ 3x-6 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 0 \\ 1 & \text{si } 0<x<3 \\ -x^2+3x+2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

5. Calcular a para que $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 1 \\ 3-ax^2 & x>1 \end{cases}$ sea continua. ¿Es derivable?

6. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & x<0 \\ ax+b & 0\le x<1 \\ 2 & x\ge 1 \end{cases}$ hallar a y b para que sea continua

¿Es derivable?

7. Siendo $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & x\le \pi \\ 2x+b & x>\pi \end{cases}$ hallar b para que sea continua en $x=\pi$.

¿Es derivable?

8. Calcular a y b para que f(x) sea continua en x=0 y x=1.

$$f(x)=\begin{cases} e^x+a; & x\le 0 \\ ax^2+2; & 0<x\le 1 \\ \dfrac{b}{2x}; & x>1 \end{cases}$$

¿Es derivable?

9. Calcular a y b para que f(x) sea continua en x=0 y x=1.

$$f(x)=\begin{cases} \cos x; & \text{si } x\le 0 \\ a+x^3; & \text{si } 0<x<1 \\ \dfrac{b}{2x}; & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

Para los va

¿Es derivable?

Ejercicios:

10. Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único punto crítico.

¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?

11. a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que sea derivable la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Halla sus extremos relativos en el caso $a = -2$, $b = 1$.

12. Halla el dominio de definición y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

13. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = arc\ tg\ \frac{x-1}{x+1}$$

que es paralela a la recta $x - 2y + 3 = 0$.

14. Halla el valor que debe tener a para que la función $f(x) = x^2\ ln\ \dfrac{x}{a}$, $a > 0$, tenga un punto singular en $x = e$.

Ejercicios:

15. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Determina a, b y c para que sea continua, tenga un máximo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$.

16. Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ a\sqrt{b - x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Determina el valor de a y b sabiendo que $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) ¿Tiene puntos singulares?

17. Estudia el crecimiento de la función $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ y determina sus máximos y mínimos para $x \in [0, 2\pi]$.

18. a) Estudia la curvatura de la siguiente función:

$$f(x) = x^2 \ln x$$

b) Escribe la ecuación de la recta tangente que pasa por su punto de inflexión.

19. Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ x^2 - 2x & \text{si } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Determina los puntos de corte con los ejes y sus extremos relativos. Dibuja su gráfica.

4. Problemas de optimización

1. Dos antenas de televisión separadas 10 m son fijadas al suelo mediante un único cable tensor. Si el cable se ata a 4 m. de altura en una an tena y a 7 m. en la otra, se desea conocer el punto de fijación del cable en el suelo de forma que la longitud del cable sea mínima.
2. Una hoja de papel debe contener 18 cm2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. y los laterales 1 cm. Calcularlas dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.
3. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 8 €/m y la de los otros 2 €/m, hallar el área del mayor campo que pueda cercarse con 288 €.
4. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 5 m.