Tema 3: Geometría: Vectores

1. Definiciones:

   Vector, módulo, direccion, sentido

2. Operaciones, significado geométrico:

   Producto por un escalar

   Suma – diferencia

   Combinación lineal, base

   Coordenadas de un vector

3. Operaciones con coordenadas

   Producto por un escalar

   Suma – diferencia

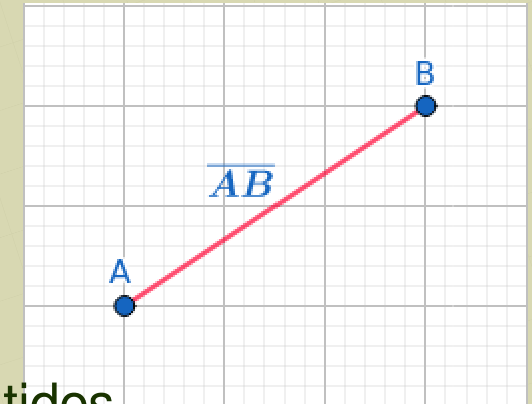
   Producto escalar

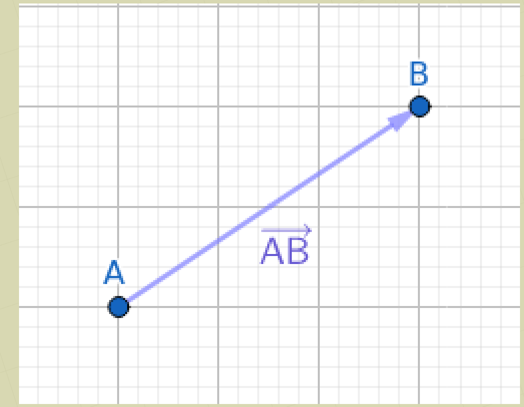
   Módulo de un vector

4. Producto escalar, significado geométrico

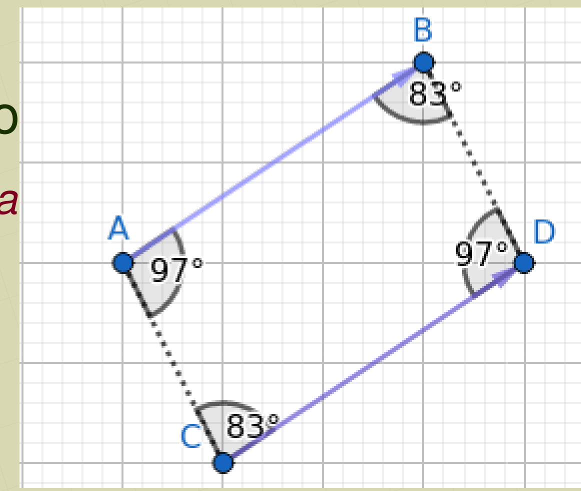
1. Definiciones

- Segmento: linea recta entre dos puntos
- Vector: segmento con orientación. Tiene un origen (A) y un extremo (B)
- Módulo: longitud del segmento
- Dirección: la de la recta que contiene al segmento
- Sentido: cada dirección admite dos sentidos

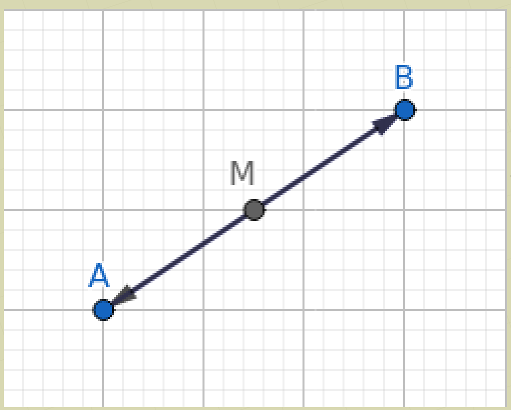




Dos vectores serán iguales cuando sean iguales estas tres componentes. En este caso, al unir sus orígenes y sus extremo se forma un paralelogramo



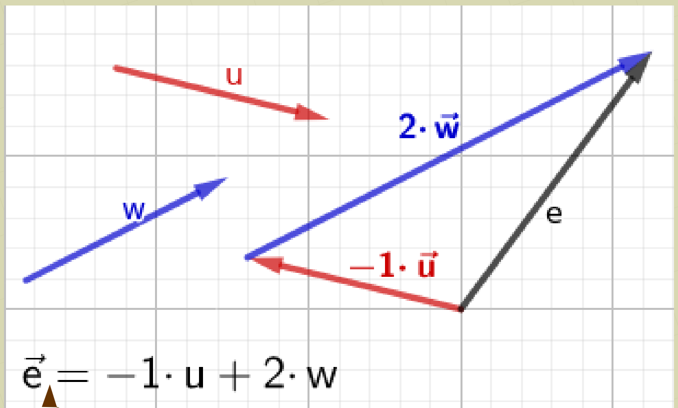
geogebra



$\overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{MB}$ tienen el mismo módulo, la misma dirección, pero sentido contrario, no son iguales

2. Operaciones

1. Producto por un escalar
   - El módulo queda multiplicado por el escalar
   - La dirección no cambia
   - El sentido no cambia si el escalar es positivo. Se invierte si el escalar es negativo
2. Suma: se encadenan los vectores colocando el origen del segundo en el extremo del primero. El resultado une el origen del primero con el extremo del segundo

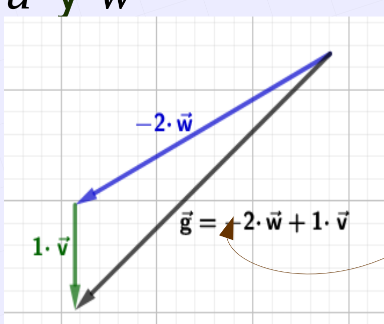


Combinación lineal: si tenemos varios vectores, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$, una combinación lineal entre ellos es cualquier operación del tipo: $\boldsymbol{a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}+\ldots}$

geogebra

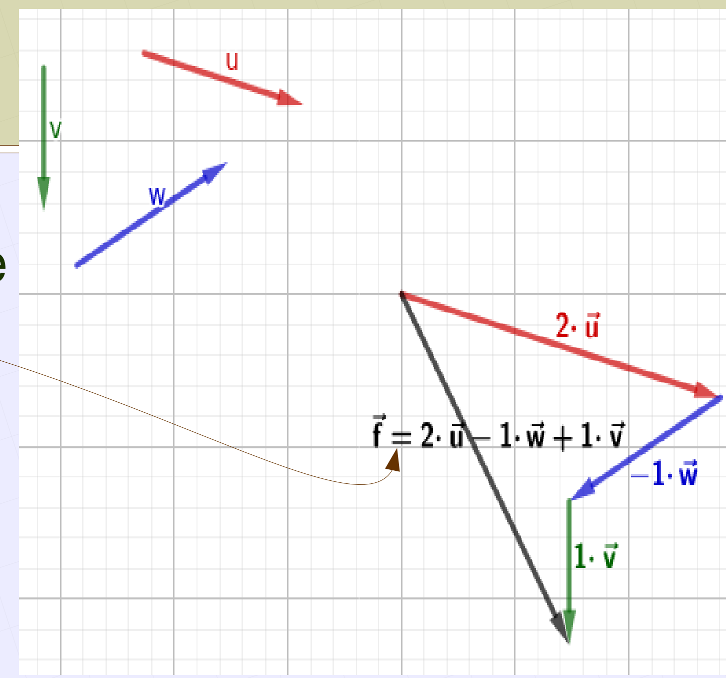
Ejemplos:

1) En el ejemplo anterior, $\vec{e}$ es una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$



2) En este, $\vec{f}$ es combinación lineal de $\vec{u}$,$\vec{w}$ y $\vec{v}$

3) En este, $\vec{g}$ es combinación lineal de $\vec{w}$ y $\vec{v}$



Base en el plano: dos vectores no paralelos forman una base.

Cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de una base de forma única.

Los coeficientes de la combinación lineal son las **coordenadas** del vector respecto de la base

Ejemplos: *(diapositiva anterior)*

1) $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son una base. Las coordenadas de $\vec{e}$ respecto de esa base son *(–1 , 2)*

$$B_1=\{\vec{u},\vec{w}\} \quad ; \quad \vec{e}=(-1,2)_{B_1}$$

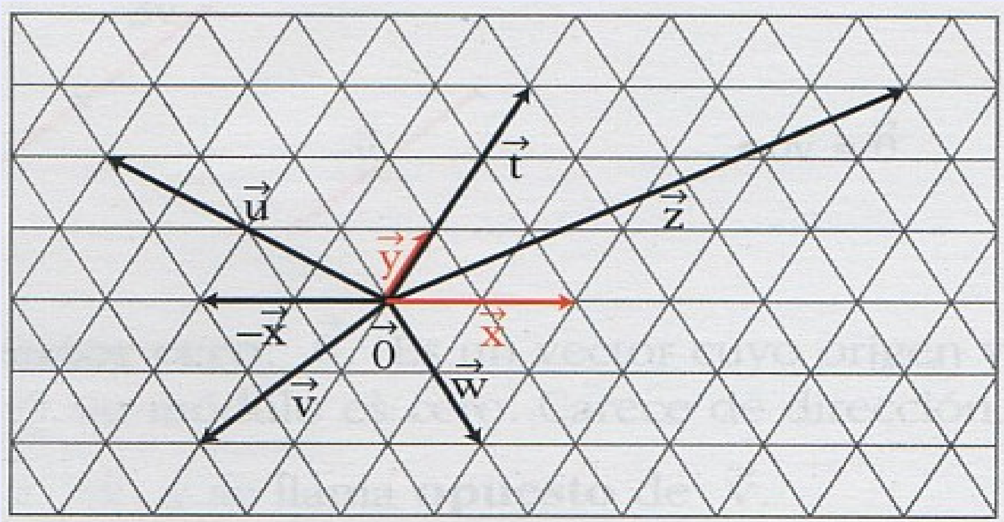
2) $\vec{u}$, $\vec{w}$ y $\vec{v}$ no son base porque en el plano, una base deben ser dos vectores

3) $\vec{w}$ y $\vec{v}$ son una base. Las coordenadas de $\vec{g}$ respecto de esa base son *(–2 , 1)*

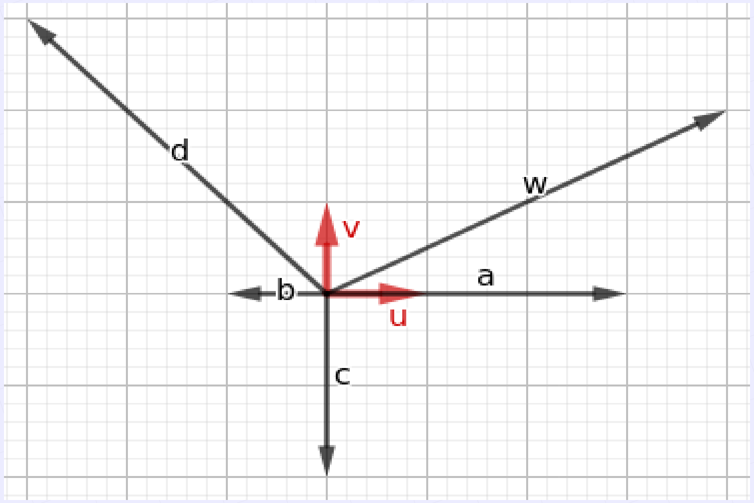
$$B_2=\{\vec{w},\vec{v}\} \quad ; \quad \vec{g}=(-2,1)_{B_2}$$

Ejercicios:

1) Los vectores $\overline{x}$ e $\overline{y}$ son base. Calcula las coordenadas de todos los demás



2) Los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son base. Calcula las coordenadas de todos los demás



3. Operaciones con coordenadas

1. Producto por un escalar: ***núm · vec = vec***
2. Suma – Diferencia: ***vec ± vec = vec***
3. Producto escalar: ***vec · vec = núm***
4. Módulo de un vector ***mód = núm***

$$a\cdot\vec{u}=a\cdot(u_1,u_2)=(a\cdot u_1,a\cdot u_2)$$
$$\vec{u}\pm\vec{v}=(u_1,u_2)\pm(v_1,v_2)=(u_1\pm v_1,u_2\pm v_2)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1,u_2)\cdot(v_1,v_2)=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$$
$$|\vec{u}|=|(u_1,u_2)|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

Ejercicios: Dados los vectores $\vec{a}=(-3,2)$, $\vec{b}=(4,0)$, $\vec{c}=(2,3)$

Calcula: a) $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ b) $(\vec{c}+3\vec{a})\cdot\vec{a}$ c) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ d) $|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|$

4. Producto escalar, significado geométrico

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

De esta fórmula se deduce lo siguiente:

1. Si el ángulo es $90°$, el producto escalar es 0: $\alpha=90^o\ (\vec{u}\perp\vec{v})\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

   Si el producto es 0, el ángulo es $90°$ (o uno de ellos es $\vec{0}$): $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow\alpha=90^o\ (\vec{u}\perp\vec{v})$ $(o\ \vec{u}\ o\ \vec{v}=0)$

2. Si el ángulo es agudo, el producto escalar es positivo: $\alpha<90^o\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}>0$
3. Si el ángulo es obtuso, el producto escalar es negativo: $\alpha>90^o\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}<0$

Ejercicios: Dados los vectores $\vec{a}=(-3,2)$, $\vec{b}=(4,0)$, $\vec{c}=(2,3)$

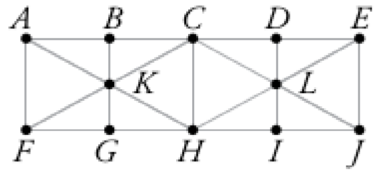
Calcula: a) $\widehat{\vec{a},\vec{b}}$ b) $\widehat{\vec{a},\vec{c}}$

c) Otro vector perpendicular a $\vec{a}$

d) Otro vector perpendicular a $\vec{a}$ que sea unitario *(mód = 1)*

Ejercicios

1. **Observa la siguiente figura:**



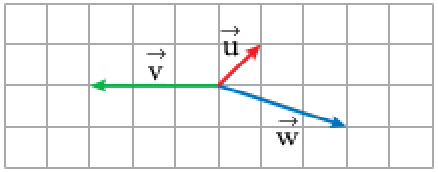
a) Compara el módulo, la dirección y el sentido de las siguientes parejas de vectores:

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{LC}$.

b) Calcula $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}$ y $\overrightarrow{HC}+2\overrightarrow{CL}$.

c) Completa las siguientes igualdades: $\overrightarrow{LC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{L\ldots}$; $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{H\ldots}=\overrightarrow{HC}$

2. **Sean** $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ **los siguientes vectores:**



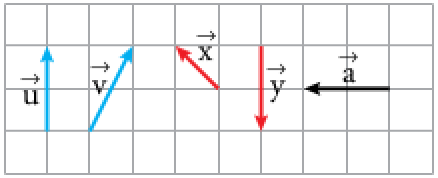
Calcula gráficamente los vectores:

a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $\vec{u}-\vec{v}$ c) $\vec{u}+\vec{w}$

d) $2\vec{u}-3\vec{w}$ e) $\vec{u}+3\vec{w}+4\vec{v}$ f) $-\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$

geogebra

3. **Escribe el vector** $\vec{a}$ **como combinación lineal de los vectores** $\vec{x}$ **e** $\vec{y}$. **Escríbelo también como combinación lineal de** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$.



geogebra

¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{a}$ **respecto de la base** $B(\vec{x},\vec{y})$**? ¿Y respecto de la base** $B'(\vec{u},\vec{v})$**?**

Ejercicios

4. **Observa el rombo de la figura y calcula:**

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

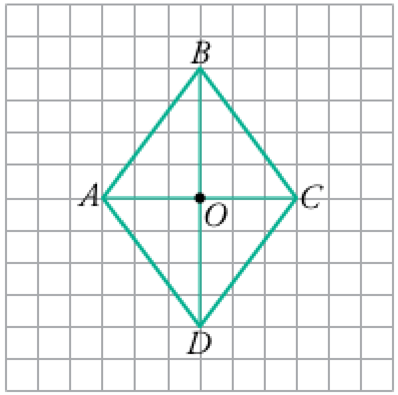
b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

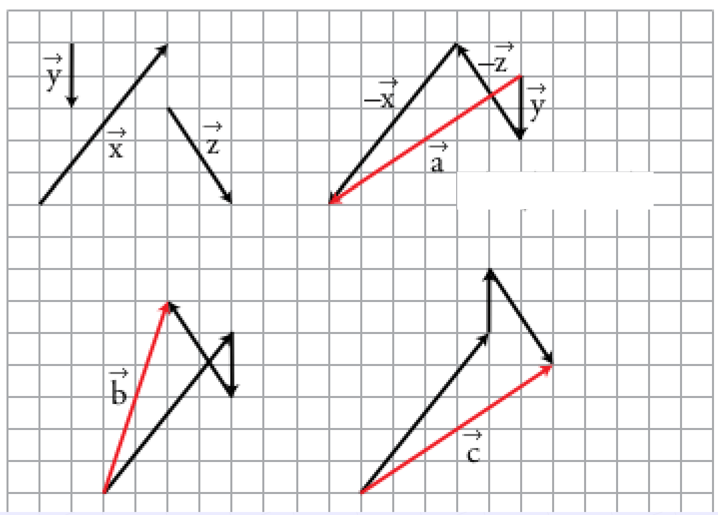
e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

f) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$



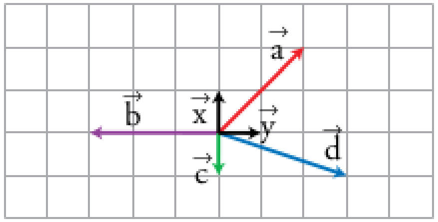
Expresa los resultados utilizando los vértices del rombo.

5. **Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los hemos obtenido operando con los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. ¿Qué operaciones hemos hecho en cada caso?**



Ejercicios

6. Escribe las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.



7. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(1, 3)$ b) $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

8. Considera el vector $\vec{u}(-1, -3)$. Da un vector $\vec{v}$ tal que $B(\vec{u}, \vec{v})$ sea una base, y un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ no formen una base.

9. Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.

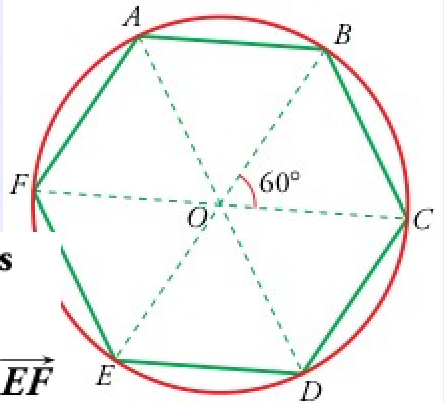
10. Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

11. Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

12. De los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sabemos que:

$$\vec{u}(-1, 1);\ |\vec{v}| = 1;\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°;\ \vec{w} \perp \vec{v}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w}$.



13. En una circunferencia de centro O y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices A, B, C, D, E, F. Calcula los productos:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$ d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF}$

Ejercicios

14. Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

15. Si A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero de lado 1, calcula:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $2\overrightarrow{AB} \cdot (-3\overrightarrow{AC})$

16. Obtener tres vectores paralelos y tres perpendiculares. En cada caso, el tercero debe tener la primera coordenada igual a 1

a) $\vec{u}(0, 3)$ b) $\vec{u}(-5, 0)$ c) $\vec{u}(3, 8)$

17. Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.

18. Dada la base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ donde $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(0, -8)$, determina, en cada caso, una base B' de vectores <u>unitarios</u> tales que:

a) Los vectores de B' sean paralelos a los de B.

b) Los vectores de B' sean perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

19. Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

20. Halla un vector de módulo 50 que sea perpendicular al vector $\vec{a}(8, 6)$.

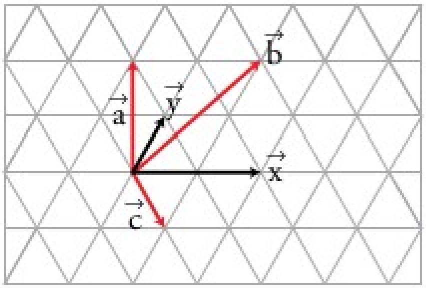
21. Dados $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, k\right)$ y $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, calcula k para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de 60°.

Ejercicios

22. Dados los vectores $\vec{u}(-1, a)$ y $\vec{v}(b, 15)$, halla a y b, en cada caso, de modo que:

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $|\vec{u}| = \sqrt{10}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ y $|\vec{v}| = 17$

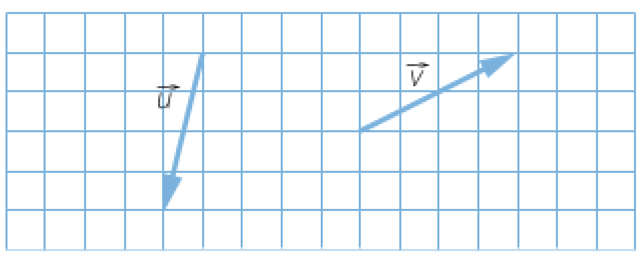
23. 

Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

24. Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de $45°$.

25. Halla un vector unitario que forme un ángulo de 30° con el vector $\vec{a}(1, \sqrt{3})$.

1. Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura forman una base.



Dibuja los vectores con coordenadas en esa base.

a) (2, 1) b) (3, –1) c) (–2, 3)

Comprueba numéricamente los resultados obtenidos

Ejercicios

2. Encuentra un vector $\vec{u} = (a, b)$ que es perpendicular a $\vec{v} = (3, 5)$ y cuyo módulo sea $|\vec{u}| = 2\sqrt{34}$.

3. Dado el vector $\vec{p} = (6, 2)$, obtén un vector $\vec{q}$ con módulo $\sqrt{89}$ y tal que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.

4. Dados $\vec{a} = (6, -2)$ y $\vec{b} = (16, 12)$, calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares. ¿Hay una solución única?

5. ¿Podrías conseguir un vector $\vec{a}$ tal que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, siendo $\vec{b} = (2, 1)$, y que sea perpendicular a $\vec{c} = (2, 6)$?

6. Calcula m para que los vectores $\vec{a} = (8, -6)$ y $\vec{b} = (m, 3)$ formen un ángulo de 60°.

$$m = \frac{736}{255} \pm \frac{\sqrt{4.411}}{255}$$

7. Encuentra un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 30° con $\vec{b} = (3, -4)$ y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{b}|$.

8. Demuestra que si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo, entonces $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ forman un ángulo recto.

9. Si $\vec{u}$ es un vector del plano de módulo 1:

a) ¿Cuántos vectores $\vec{v}$ hay de módulo 2, tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$?

b) ¿Y tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$?

c) ¿Y tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$?