

# Tema 2: Números complejos

1. Números imaginarios:  $i$
2. Números complejos.
  - 2.1. Representación gráfica
  - 2.2. Forma binómica, forma cartesiana, forma polar
  - 2.3. Nomenclatura
3. Operaciones con números complejos
  - 3.1. Forma binómica: Suma, resta, producto, cociente, potencia
  - 3.2. Forma polar: Producto, cociente, potencia, raíz

# 1. La unidad imaginaria: $i$

Ecuaciones de segundo grado con soluciones reales:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

Estas tres ecuaciones tienen solución (dos soluciones). Sus soluciones son **números reales** (números que existen en la realidad)

Ecuaciones de segundo grado con soluciones imaginarias:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{-1}$$

$$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$$

$$x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{-3} = \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}$$

Estas tres ecuaciones no tienen solución. Pero podemos **imaginarnos** una solución: inventamos un nuevo número:  $\sqrt{-1} = i$  ;  $i^2 = -1$

Sus “soluciones” son **números imaginarios** (números que no existen en la realidad)

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm i$$

$$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{-3} = \pm \sqrt{3}i$$

Resolver estas ecuaciones:

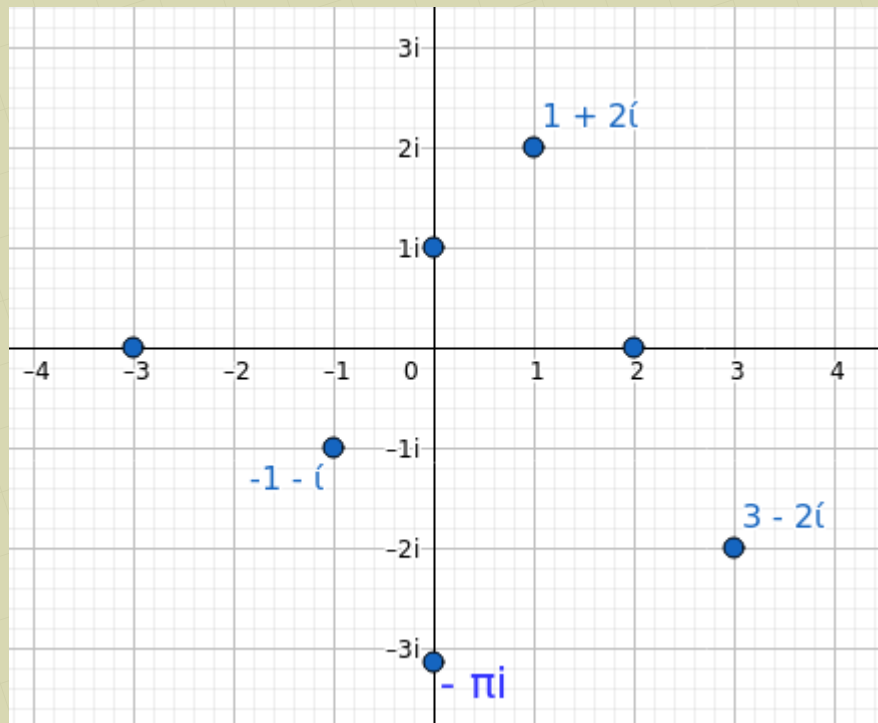
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + i \\ x_2 = 1 - i \end{cases}$$

## 2. Números complejos

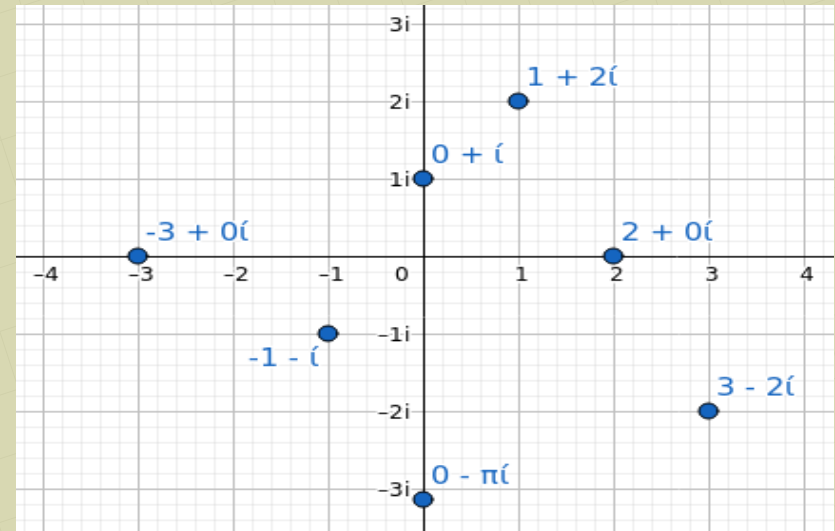
### 2.1. Representación gráfica

Utilizamos dos ejes: el eje **X** para los números **reales** y el eje **Y** para los **imaginarios**.  
Combinando ambos conseguimos representar cualquier **número complejo**

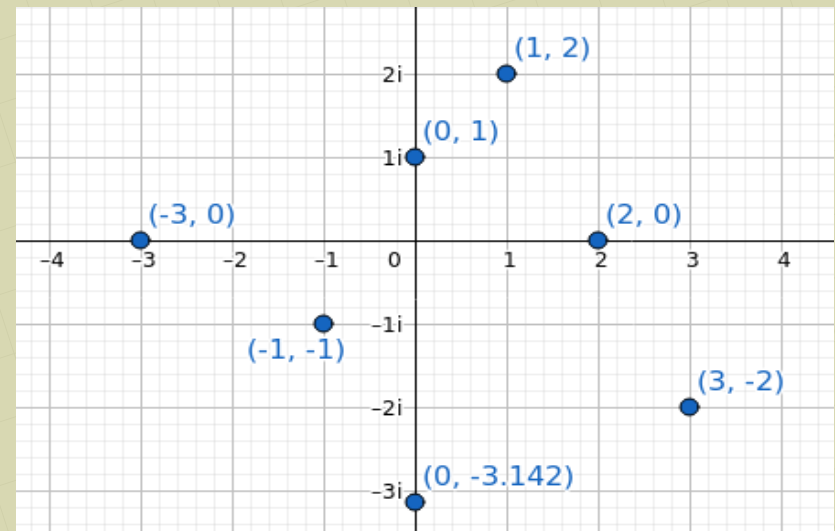


### 2.2. Representación escrita

#### 1. Forma binómica:

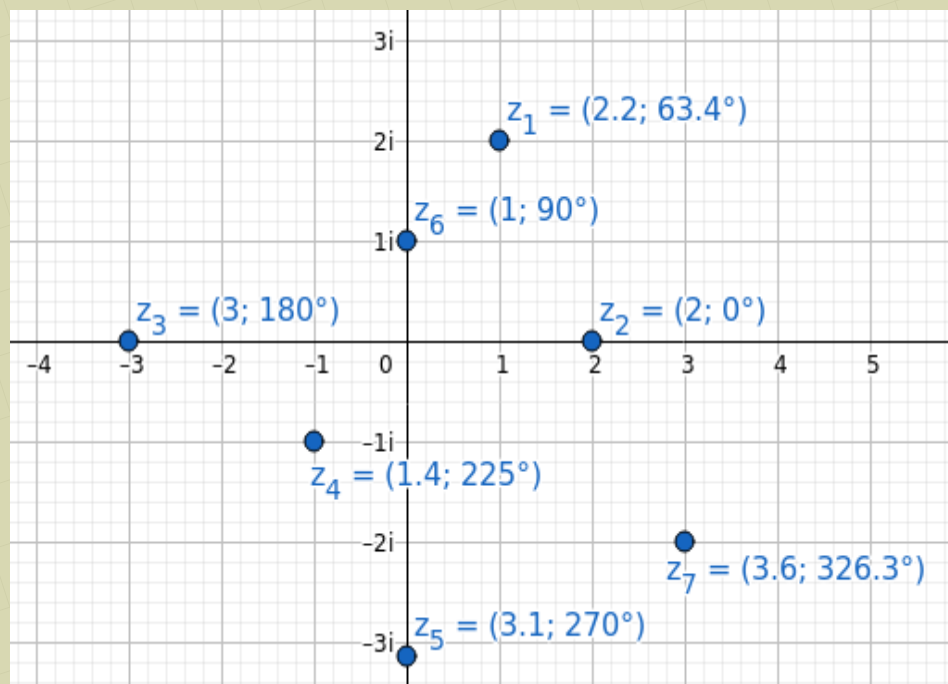


#### 2. Forma cartesiana:



### 3. Forma polar:

- Módulo: distancia del número al origen de coordenadas
- Argumento: ángulo que forma con el eje horizontal positivo



*geogebra*

$$\left. \begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{1^2 + 2^2} = 2,2 \\ \alpha &= \arctan \frac{2}{1} = 63,4^\circ \end{aligned} \right\} z_1 = \sqrt{5}_{63,4}$$

$$\left. \begin{aligned} |z_7| &= \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,6 \\ \alpha &= \arctan -\frac{2}{3} = -33,7^\circ = 326,3^\circ \end{aligned} \right\} z_7 = \sqrt{13}_{-33,7}$$

$$z = a + bi = (a, b) = |z|_\alpha \quad \left\{ \begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha &= \arctan \frac{b}{a} \end{aligned} \right.$$

### Ejercicios:

1. Pasar a forma cartesiana y polar: a)  $-5i$  ; b)  $5$  ; c)  $5 - 5i$  ; d)  $-1 - 5i$
2. Pasar a forma binómica y cartesiana: a)  $2_{30}$  ; b)  $4_{90}$  ; c)  $4_{-90}$  ; d)  $8_{156}$

$$z = |z|_\alpha = a + bi = (a, b) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= |z| \cdot \cos \alpha \\ b &= |z| \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right.$$

## 2.3. Nomenclatura

- Parte real: primera coordenada
- Parte imaginaria: segunda coordenada

- Módulo: distancia al O
- Argumento: ángulo desde el eje X positivo

- Real: parte imaginaria = 0
- Imaginario puro: parte real = 0

- Opuesto: cambio de signo  $z \rightarrow -z$
- Conjugado: cambio de signo en la parte imaginaria  $z \rightarrow \bar{z}$

- Inverso:  $z \rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z}$

- $3 - 4i$
- Parte real: 3
  - Parte imaginaria: -4
- $(3, -4)$

- $3 - 4i$
- Módulo: 5
  - Argumento:  $306,87^\circ$
- $5_{306,87}$

- $4 = (4, 0) = 4_{0^\circ}$  ;  $-2 = (-2, 0) = 2_{180^\circ}$
- $4i = (0, 4) = 4_{90^\circ}$  ;  $-2i = (0, -2) = 2_{-90^\circ}$

- Opuesto:  $3 - 4i = 5_{306,89^\circ} \rightarrow -3 + 4i = 5_{126,89^\circ}$
- Conjugado:  $3 - 4i = 5_{306,89^\circ} \rightarrow 3 + 4i = 5_{53,11^\circ}$
- Opuesto:  $4 = 4_0 \rightarrow -4 = 4_{180}$
- Conjugado:  $4 = 4_{0^\circ} \rightarrow 4 = 4_{0^\circ}$
- Opuesto:  $-4i = 4_{-90} \rightarrow 4i = 4_{90}$
- Conjugado:  $-4i = 4_{-90} \rightarrow 4i = 4_{90}$

Aprenderemos a calcularlo más adelante

*geogebra*

# 3. Operaciones con números complejos

## 3.1. Forma binómica

- Suma – diferencia:  $(3+3i)+(2-i)=5+2i$  ;  $(3+3i)-(2-i)=1+4i$
- Producto por un escalar:  $3 \cdot (2-4i)=6-12i$
- Producto:  $(3+3i) \cdot (2-i)=6-3i+6i-3i^2=6+3i-3 \cdot (-1)=6+3i+3=9+3i$
- Cociente:  $(3+3i)/(2-i)$  : hay que “racionalizar”, se multiplica por el conjugado

$$\frac{3+3i}{2-i} = \frac{(3+3i) \cdot (2+i)}{(2-i) \cdot (2+i)} = \frac{6+3i+6i+3i^2}{4-i^2} = \frac{3+9i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$$

producto notable       $i^2 = -1$

- Potencias:  $i^0 = +1$   
 $i^1 = i$   
 $i^2 = -1$   
 $i^3 = -i$   
 $i^4 = +1$
- $$(2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$$
- $$(3+2i)^3 = \underbrace{3^3} + \underbrace{3 \cdot 3^2 \cdot 2i} + \underbrace{3 \cdot 3 \cdot (2i)^2} + \underbrace{(2i)^3} = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i$$

## Ejercicios:

### 1. Calcula:

a)  $-(1-i)+3-i \cdot (4+i)$

b)  $\frac{((3-3i)+2 \cdot 2i)^2}{5-(5-5i)}$

c)  $\frac{3-i}{5-2i} \cdot (1-i) \cdot (2i)^7$

e)  $(-2+2i)^{-1}$

d)  $(-2+2i)^4$

### 3. Operaciones con números complejos

#### 3.2. Forma polar

- Suma – diferencia: Lo mejor es pasar a forma binómica y hacer la operación

- Producto por un escalar:  $k \cdot z = k \cdot (|z|_{\alpha}) = (k \cdot |z|)_{\alpha}$

- Producto: 
$$\left. \begin{matrix} z_1 = |z_1|_{\alpha_1} \\ z_2 = |z_2|_{\alpha_2} \end{matrix} \right\} ; \quad z_1 \cdot z_2 = (|z_1| \cdot |z_2|)_{\alpha_1 + \alpha_2}$$

- Cociente: 
$$\left. \begin{matrix} z_1 = |z_1|_{\alpha_1} \\ z_2 = |z_2|_{\alpha_2} \end{matrix} \right\} ; \quad \frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{|z_1|}{|z_2|} \right)_{\alpha_1 - \alpha_2}$$

- Potencias:  $z^n = (|z|_{\alpha})^n = (|z|^n)_{n \cdot \alpha}$

Ejercicios: Dados los complejos  $u = 3_{45}$  ,  $w = 1_{270}$  ,  $z = 6_{60}$

Calcula:

a)  $u \cdot w \cdot z$

b)  $\frac{u^2}{z}$

c)  $u^0$  ,  $u^1$  ,  $u^2$  , ...  $u^8$  *geogebra*

- Raíces: 
$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{|z|_{\alpha}}) = (\sqrt[n]{|z|})_{\frac{\alpha}{n}}$$

Con esta fórmula se obtiene la primera solución, pero deben ser '**n soluciones**':

$$\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{360}{n} , \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

## Ejemplos:

1)  $\sqrt[3]{8_{120}} = ?$

$$(\sqrt[3]{8} = 2 ; \frac{120}{3} = 40 ; \frac{360}{3} = 120)$$

$$\sqrt[3]{8_{120}} = \begin{cases} 2_{40} \\ 2_{160} \\ 2_{280} \end{cases}$$

2)  $\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{90}} =$

$$(\sqrt[4]{1} = 1 ; \frac{90}{4} = 22,5 ; \frac{360}{4} = 90) = \begin{cases} 1_{22,5} \\ 1_{112,5} \\ 1_{202,5} \\ 1_{292,5} \end{cases}$$

3)  $\sqrt{16} = \sqrt{16_0} =$

$$(\sqrt{16} = 4 ; \frac{0}{2} = 0 ; \frac{360}{2} = 180) = \begin{cases} 4_0 \\ 4_{180} \end{cases} = \begin{cases} 4 \\ -4 \end{cases}$$

4)  $\sqrt[4]{3-i} = \sqrt[4]{\sqrt{10}_{-18,4349}} =$

$$(\sqrt[4]{\sqrt{10}} = \sqrt[8]{10} ; -\frac{18,4349}{4} = -4,6087 ; \dots) = \begin{cases} \sqrt[8]{10}_{-4,6087} \\ \sqrt[8]{10}_{85,3913} \\ \sqrt[8]{10}_{175,3913} \\ \sqrt[8]{10}_{265,3913} \end{cases} = \begin{cases} 1,33 - 0,11i \\ 0,11 + 1,33i \\ -1,33 + 0,11i \\ -0,11 - 1,33i \end{cases}$$

hay que pasarlo a forma polar

$$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{arc tg } \frac{-1}{3} = -18,4349$$

## Ejercicios

1. Dados los números complejos  $z = 1 - 3i$ ,  $w = -3 + 2i$ ,  $t = -2i$ , calcula:

- a)  $zwt$                       b)  $zt - w(t + z)$                       c)  $\frac{w}{z}t$
- d)  $\frac{2z - 3t}{w}$                       e)  $\frac{3z + it}{3}w$                       f)  $\frac{z^2 - wt^2}{2}$

$$22 - 6i$$

$$-\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i$$

$$-13 - 19i$$

$$1 + \frac{37}{3}i$$

$$-\frac{7}{5} + \frac{9}{5}i$$

$$-10 + i$$

2. Calcula:

- a)  $i^{37}$                       b)  $i^{126}$                       c)  $i^{-7}$

3. Dado el número complejo  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , prueba que:

- a)  $1 + z + z^2 = 0$                       b)  $\frac{1}{z} = z^2$

De dos formas:

1) Comprobando

2) Resolviendo las ecuaciones

4. Determina  $k$  para que el cociente  $\frac{k+i}{1+i}$  sea igual a  $2 - i$ .

5. Calcula  $a$  y  $b$  de modo que se verifique:

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

6. Determina  $a$  para que  $(a - 2i)^2$  sea un número imaginario puro.

7. Expresa en forma polar y calcula:

- a)  $(-1 - i)^5$                       b)  $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i}$                       c)  $\sqrt[6]{64}$
- d)  $\sqrt[3]{8i}$                       e)  $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$                       f)  $(3 - 4i)^3$

$$4 + 4i$$

$$\sqrt{3} + i$$

$$\sqrt[4]{2}_{75^\circ}$$

$$-4096$$

$$2\sqrt{2}$$

$$125_{200^\circ 36'}$$

# Ejercicios

8. a)  $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

b)  $\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$

$$\frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i$$

$$0,785 + 0,347i$$

$$-0,693 + 0,56i$$

$$-0,092 - 0,853i$$

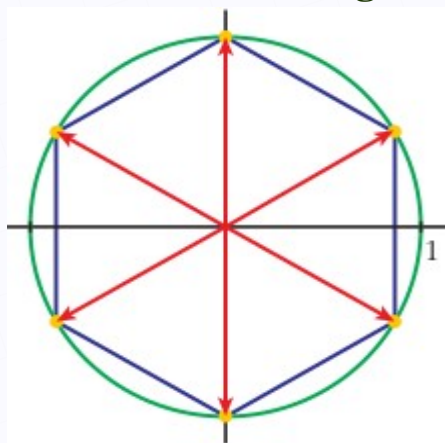
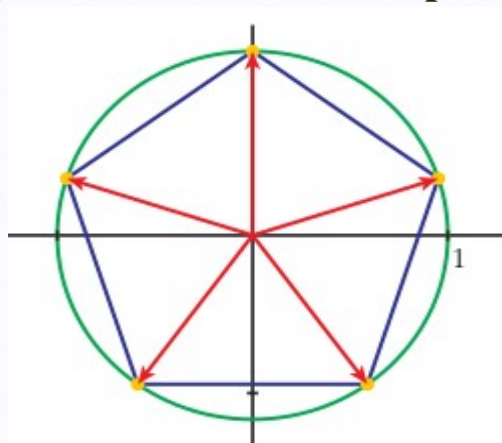
9. Expresa en forma polar  $z$ , su opuesto  $-z$ , y su conjugado  $\bar{z}$  en cada uno de estos casos:

a)  $z = 1 - \sqrt{3}i$

b)  $z = -2 - 2i$

c)  $z = -2\sqrt{3} + 2i$

10. ¿Qué tienen en común los puntos amarillos en cada figura?



11. Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

a)  $z^2 + 4 = 0$

b)  $z^2 + z + 4 = 0$

c)  $z^3 + 8i = 0$

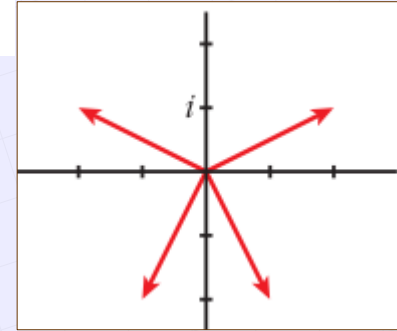
d)  $iz^4 + 4 = 0$

12. Calcula  $m$  para que el número complejo  $3 - mi$  tenga el mismo módulo que  $2\sqrt{5} + \sqrt{5}i$ .

13. El producto de dos números complejos es  $2_{90^\circ}$  y el cubo del primero dividido por el otro es  $(1/2)_{0^\circ}$ . Hállalos.

## Ejercicios

**14.** ¿Pueden ser  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = -2 + i$ ,  $z_3 = -1 - 2i$  y  $z_4 = 1 - 2i$ , las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.



**15.** ¿Pueden ser las raíces de un número complejo,  $z$ , los números  $2_{28^\circ}$ ,  $2_{100^\circ}$ ,  $2_{172^\circ}$ ,  $2_{244^\circ}$  y  $2_{316^\circ}$ ? En caso afirmativo, halla  $z$ .

**16.** Una de las raíces cúbicas de un número complejo  $z$  es  $1 + i$ . Halla  $z$  y las otras raíces cúbicas.