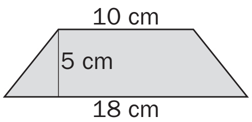
PARA EMPEZAR

1 Dibuja un trapecio isósceles de 5 centímetros de altura y bases de 18 y 10 centímetros, respectivamente, y calcula su área y su perímetro.

Como es isósceles, dos de sus lados deben ser iguales:



Su área viene dada por la expresión: $A = \frac{(B + b)}{2}h = \frac{(18 + 10)}{2} \cdot 5 = 70 \text{ cm}^2$

Para calcular el perímetro se halla primero la longitud de los lados iguales mediante el teorema de Pitágoras:

$\sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6{,}4$ cm

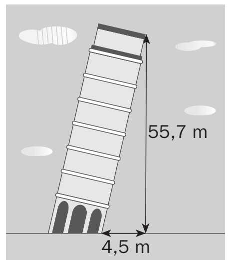
$P = 18 + 10 + 2 \cdot 6{,}4 = 40{,}8$ cm

2 Un cucurucho de barquillo tiene un radio de 3 centímetros y una altura de 10. Sobre él hay una bola de helado de 6 centímetros de diámetro, y además, interiormente está lleno de helado. Calcula el volumen total de helado.

El volumen de helado será la suma del volumen del cono y del volumen de la semiesfera que tiene encima.

$$V = V_{\text{cono}} + \frac{1}{2}V_{\text{esfera}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 10}{3} + \frac{2}{3}\pi\, 3^3 = 150{,}8 \text{ cm}^3$$

3 La base de la Torre de Pisa es un círculo de 10 metros de radio. Observa la figura y calcula el volumen del cilindro que formaría la torre si estuviera en posición vertical.



El volumen de un cilindro viene dado por: $V = A_{\text{base}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

La altura de la torre la calculamos a partir del teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{4{,}5^2 + 55{,}7^2} = 55{,}88$ m

Por tanto, el volumen será:

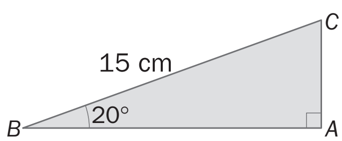
$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 55{,}88 = 17\,555{,}22 \text{ m}^3$

Resolución de triángulos rectángulos

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

8.1 Halla los elementos desconocidos del triángulo rectángulo de la figura y comprueba que se cumple el teorema de Pitágoras.



Como los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son complementarios, tenemos que $\widehat{B} + \widehat{C} = 90° \Rightarrow \widehat{C} = 90° - 20° = 70°$

Se aplican las razones trigonométricas para obtener los catetos:

$c = a \cdot \cos\widehat{B} = 15 \cdot \cos 20° = 14{,}095$ cm

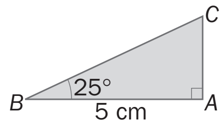
$b = a \cdot \operatorname{sen}\widehat{B} = 15 \cdot \operatorname{sen} 20° = 5{,}13$ cm

Se comprueba que efectivamente se cumple el teorema de Pitágoras:

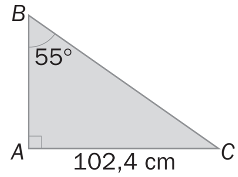
$15^2 = 225$ y $14{,}095^2 + 5{,}13^2 = 225$

8.2 **Resuelve los siguientes triángulos rectángulos y comprueba que se cumple el teorema de Pitágoras.**

a)



b)



a) $b = \text{tg}\,25° \cdot 5 = 2{,}3$ cm

$a = \dfrac{5}{\cos 25°} = 5{,}5$ cm

Efectivamente: $\sqrt{2{,}3^2 + 5^2} = 5{,}5$

$\widehat{C} = 90° - 25° = 65°$

b) $c = \dfrac{102{,}4}{\text{tg}\,55°} = 71{,}7$ cm

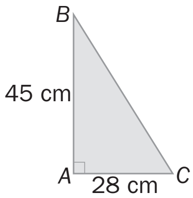
$a = \dfrac{102{,}4}{\text{sen}\,55°} = 125$ cm

Efectivamente: $\sqrt{102{,}4^2 + 71{,}7^2} = 125$

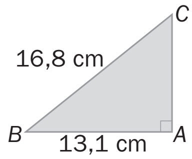
$\widehat{C} = 90° - 55° = 35°$

8.3 **Calcula la medida de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos.**

a)



b)



a) $\text{tg}\,\widehat{B} = \dfrac{28}{45} = 0{,}6\widehat{2} \Rightarrow \widehat{B} = 31°\ 53'\ 27''$

$\widehat{C} = 90° - 31°\ 53'\ 27'' = 58°\ 6'\ 33''$

b) $\text{sen}\,\widehat{C} = \dfrac{13{,}1}{16{,}8} = 0{,}78 \Rightarrow \widehat{C} = 51°\ 15'\ 38''$

$\widehat{B} = 90° - 51°\ 15'\ 38'' = 38°\ 44'\ 22''$

8.4 **De un triángulo *ABC* rectángulo conocemos la medida de los otros dos ángulos: $\widehat{B} = 60°$ y $\widehat{C} = 30°$. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones.**

a) ¿Se puede resolver el triángulo *ABC*?

b) ¿Se pueden hallar las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo *ABC*?

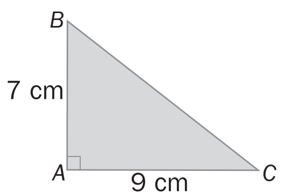
a) No, ya que para resolverlo se tiene que conocer, al menos, la longitud de un lado.

b) Sí, ya que las razones trigonométricas son invariantes para semejanzas de triángulos:

$$\text{sen}\,60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$$

$$\text{sen}\,30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \text{tg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

8.5 **Resuelve el siguiente triángulo rectángulo.**



$a = \sqrt{9^2 + 7^2} = 11{,}402$ cm

$\text{tg}\,\widehat{C} = \dfrac{7}{9} = 0{,}\widehat{7} \Rightarrow \widehat{C} = 37°\ 52'\ 30''$

$\widehat{B} = 90° - 37°\ 52'\ 30'' = 52°\ 7'\ 30''$

8.6 **En el triángulo rectángulo de la actividad anterior:**

a) Halla la longitud de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

b) Halla la altura sobre la hipotenusa.

a) Aplicando el teorema del cateto obtenemos:

$n = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{7^2}{11{,}402} = 4{,}297$ cm

$m = \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{81}{11{,}402} = 7{,}104$ cm

b) Aplicando el teorema de la altura obtenemos:

$h = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{4{,}297 \cdot 7{,}104} = 5{,}525$ cm

8.7 **a) Calcula la longitud del circuito de *karts* de la figura.**

b) ¿Cuál es el menor número de vueltas que hay que dar al circuito para recorrer más de un kilómetro?

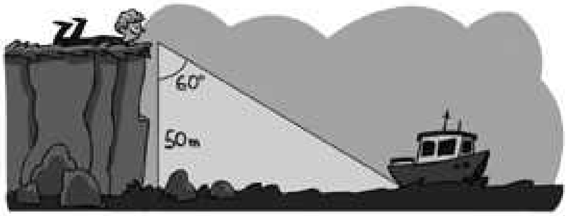
a) La hipotenusa mide: $\dfrac{100}{\cos 50^\circ} = 155{,}57$ m.

El cateto desconocido mide: $100 \cdot \text{tg}\, 50^\circ = 119{,}17$ m.

La longitud del circuito es: $100 + 155{,}5 + 119{,}17 = 374{,}67$ m.

b) $\dfrac{1000}{374{,}67} = 2{,}67$ vueltas. Habrá que dar tres vueltas para recorrer más de un kilómetro.

8.8 **Desde el borde de un acantilado de 50 metros de altura, Ángel observa, bajo un ángulo de 60º, cómo una embarcación realiza las tareas de pesca. ¿A qué distancia de la costa se encuentra aproximadamente la embarcación?**

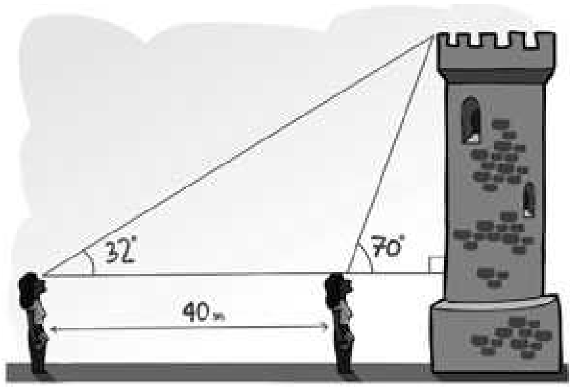


Están a una distancia de $50 \cdot \text{tg}\, 60^\circ = 86{,}6$ m.

8.9 **Desde el lugar donde se encuentra Yaiza, puede observar una torre con un ángulo de elevación de 32º. Si Yaiza avanza 40 metros en dirección a la torre, la observa con un ángulo de 70º.**

a) Calcula la altura de la torre si la estatura de Yaiza es de 1,65 metros.

b) ¿A qué distancia de la torre estaba Yaiza inicialmente?



Sea h la altura de la torre y x la distancia inicial a la que se está de la torre.

Tenemos que:

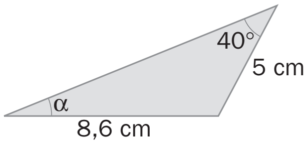
$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}\, 32^\circ = \dfrac{h}{x} \Rightarrow 0{,}625x = h \\ \text{tg}\, 70^\circ = \dfrac{h}{x - 40} \Rightarrow 2{,}747x - 109{,}88 = h \end{array}\right\} \; 0{,}625x = 2{,}747x - 109{,}88 \Rightarrow x = \frac{109{,}88}{2{,}122} = 51{,}781 \text{ m}$$

Teoremas del seno y del coseno

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

8.10 **Calcula el ángulo α del triángulo de la figura.**

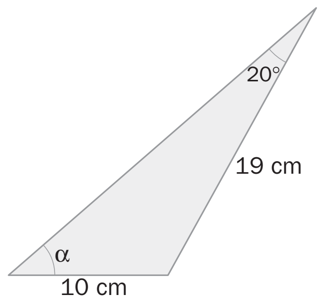


Aplicando el teorema del seno tenemos que: $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{5} = \dfrac{\text{sen}\, 40^\circ}{8{,}6} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{5\text{sen}\, 40^\circ}{8{,}6} = 0{,}374$

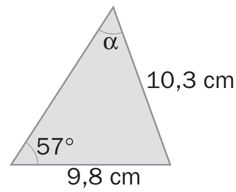
Por tanto, $\alpha = 0{,}374$ $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ $= 21{,}962^\circ = 21^\circ\, 57'\, 45''$

8.11 Calcula el ángulo α de los siguientes triángulos.

a)



b)

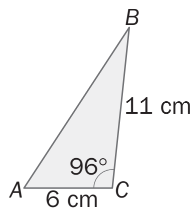


a) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{19} = \dfrac{\operatorname{sen} 20^\circ}{10} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{19 \cdot \operatorname{sen} 20^\circ}{10} = 0{,}650 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 40^\circ\ 32'\ 29''$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{9{,}8} = \dfrac{\operatorname{sen} 57^\circ}{10{,}3} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{9{,}8 \cdot \operatorname{sen} 57^\circ}{10{,}3} = 0{,}798 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 52^\circ\ 56'\ 22''$

Ejercicio resuelto

8.12 Calcula la medida del lado desconocido del triángulo de la figura.



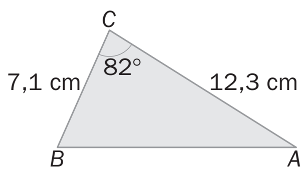
Por el teorema del coseno tenemos que:

$c^2 = 6^2 + 11^2 - 2 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \cos 96^\circ = 36 + 121 - 132 \cdot (-0{,}105) = 157 + 13{,}86 = 170{,}86$

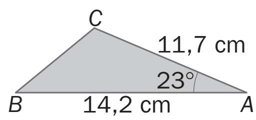
Con lo que: $c = \sqrt{170{,}86} = 13{,}07$ cm

8.13 Calcula los lados de los siguientes triángulos.

a)



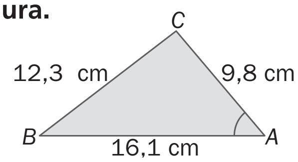
b)



a) $x^2 = 12{,}3^2 + 7{,}1^2 - 2 \cdot 12{,}3 \cdot 7{,}1 \cdot \cos 82^\circ = 177{,}391 \quad \Rightarrow \quad x = 13{,}319$ cm

b) $x^2 = 11{,}7^2 + 14{,}2^2 - 2 \cdot 11{,}7 \cdot 14{,}2 \cdot \cos 23^\circ = 32{,}665 \quad \Rightarrow \quad x = 5{,}715$ cm

8.14 Calcula el ángulo $\widehat{A}$ del triángulo de la figura.



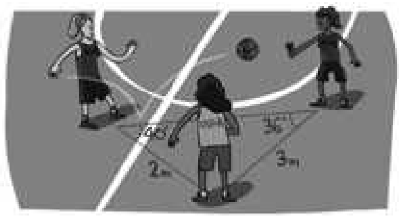
Aplicando el teorema del coseno tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{16{,}1^2 + 9{,}8^2 - 12{,}3^2}{2 \cdot 16{,}1 \cdot 9{,}8} = 0{,}646$$

$\alpha = 49^\circ\ 45'\ 33''$

P A R A   A P L I C A R

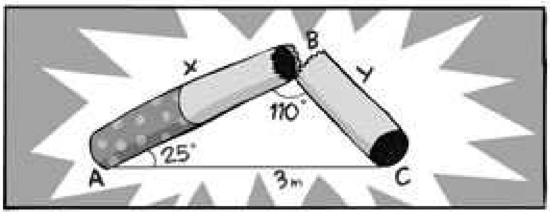
8.15 Observa cómo están situadas tres de las jugadoras en un momento del partido. ¿Qué distancia hay entre las dos del mismo equipo?



Aplicamos el teorema del coseno para calcular la distancia d entre las jugadoras:

$d^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(180^\circ - 36^\circ - 40^\circ) = 4 + 9 - 12 \cdot \cos 104^\circ = 15{,}90 \Rightarrow d = 3{,}99$ m

8.16 **Este es el cartel de una campaña publicitaria contra el tabaco. ¿Cuánto mide el cigarro que aparece en él?**



Tenemos que calcular los dos lados en los que está partido el cigarro.

Aplicando el teorema del seno tenemos que:

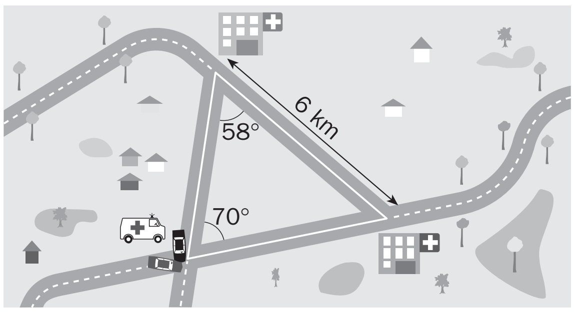
$$\frac{\text{sen}\,110°}{3} = \frac{\text{sen}\,25°}{y} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot \text{sen}\,25°}{\text{sen}\,110°} = 1{,}35 \text{ m}$$

Aplicándolo de nuevo, obtenemos:

$$\frac{\text{sen}\,110°}{3} = \frac{\text{sen}\,(180° - 110° - 25°)}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot \text{sen}\,45°}{\text{sen}\,80°} = 2{,}15 \text{ m}$$

Con lo cual, el cigarro mide 1,35 m + 2,15 m = 3,50 m.

8.17 **Una ambulancia está socorriendo a los heridos de un accidente de tráfico. Observa el mapa y señala cuál de los dos hospitales se encuentra más cerca del lugar del accidente.**



Para calcular la distancia d_2 al hospital Naranja (abajo a la derecha en la ilustración) podemos usar el teorema del seno:

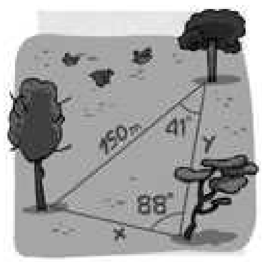
$$\frac{\text{sen}\,70°}{6} = \frac{\text{sen}\,58°}{d_2} \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{6 \cdot \text{sen}\,58°}{\text{sen}\,70°} = 5{,}415 \text{ km}$$

Para calcular la distancia d_1 al hospital Azul (arriba) usamos de nuevo el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,70°}{6} = \frac{\text{sen}\,(180° - 58° - 70°)}{d_1} \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{6 \cdot \text{sen}\,52°}{\text{sen}\,70°} = 5{,}032 \text{ km}$$

Luego, el hospital Azul está más cercano.

8.18 **Una parcela triangular está delimitada por tres árboles como se muestra en la figura. Sus dueños han decidido vallarla. Si la alambrada se vende en rollos de 50 metros, ¿cuántos rollos necesitan comprar? ¿Cuántos metros les sobrarán?**



El lado x lo podemos obtener mediante el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,88°}{150} = \frac{\text{sen}\,41°}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{150 \cdot \text{sen}\,41°}{\text{sen}\,88°} = 98{,}47 \text{ m}$$

Calculamos el lado y utilizando el teorema del coseno:

$$y^2 = 98{,}47^2 + 150^2 - 2 \cdot 98{,}47 \cdot 150 \cdot \cos\,(180° - 41° - 88°) = 13605{,}59 \Rightarrow y = 116{,}64 \text{ m}$$

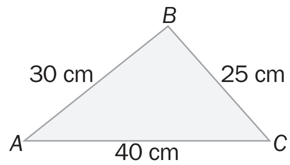
Los metros de valla que van a utilizar son 50 + 98,47 + 116,64 = 365,11 m

Los dueños necesitan comprar $\frac{365{,}11}{50} = 7{,}3 \Rightarrow$ 8 rollos de valla y sobrarán 34,89 m.

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

8.19 Resuelve el triángulo de la figura.



Si aplicamos el teorema del coseno, tenemos que:

$25^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos\widehat{A} \Rightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{40^2 + 30^2 - 25^2}{2 \cdot 40 \cdot 30} = 0{,}781$, con lo que $\widehat{A} = 38°\ 38'\ 52''$

Del mismo modo:

$$\cos\widehat{B} = \frac{25^2 + 30^2 - 40^2}{2 \cdot 25 \cdot 30} = -0{,}05 \Rightarrow \widehat{B} = 92°\ 51'\ 58''$$

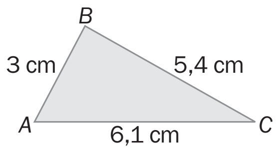
Observa en el dibujo que efectivamente el ángulo $\widehat{B}$ es obtuso, y recuerda que el coseno de los ángulos del segundo cuadrante es negativo.

Finalmente se halla el tercer ángulo:

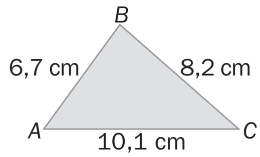
$$\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180° - (38°\ 38'\ 52'' + 92°\ 51'\ 58'') = 48°\ 29'\ 10''$$

8.20 Resuelve los siguientes triángulos, de los que se conocen los tres lados.

a)



b)



a) Por el teorema del coseno tenemos que:

$$6{,}1^2 = 3^2 + 5{,}4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5{,}4 \cdot \cos\widehat{B} \Rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{3^2 + 5{,}4^2 - 6{,}1^2}{2 \cdot 3 \cdot 5{,}4} = 0{,}029$$

$\widehat{B} = 88°\ 19'\ 11''$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,(88°\ 19'\ 11'')}{6{,}1} = \frac{\text{sen}\,\widehat{C}}{3} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{C} = 0{,}492 \Rightarrow \widehat{C} = 29°\ 26'\ 43''$$

$\widehat{A} = 180° - 88°\ 19'\ 11'' - 29°\ 26'\ 43'' = 62°\ 14'\ 6''$

b) Por el teorema del coseno tenemos que:

$$10{,}1^2 = 6{,}7^2 + 8{,}2^2 - 2 \cdot 6{,}7 \cdot 8{,}2 \cdot \cos\widehat{B} \Rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{6{,}7^2 + 8{,}2^2 - 10{,}1^2}{2 \cdot 6{,}7 \cdot 8{,}2} = 0{,}092$$

$\widehat{B} = 84°\ 43'\ 17''$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,(84°\ 43'\ 17'')}{10{,}1} = \frac{\text{sen}\,\widehat{C}}{6{,}7} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{C} = 0{,}661 \Rightarrow \widehat{C} = 41°\ 20'\ 32''$$

$\widehat{A} = 180° - 41°\ 20'\ 32'' - 84°\ 43'\ 17'' = 53°\ 56'\ 11''$

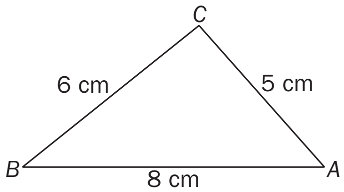
8.21 a) Dibuja con regla y compás un triángulo cuyos lados midan 5, 6 y 8 centímetros, respectivamente.

b) ¿Qué tipo de triángulo has obtenido?

c) Utiliza el transportador para obtener la medida aproximada de sus ángulos.

d) Aplica el teorema del coseno para calcular la medida de sus ángulos y comprueba que los resultados son parecidos a los obtenidos en el apartado anterior.

a)



b) El triángulo obtenido es obtusángulo, ya que $8^2 > 5^2 + 6^2$.

c) Los ángulos miden: $\widehat{A} = 38°\ 30'$; $\widehat{B} = 48°\ 30'$ y $\widehat{C} = 93°$.

d) Aplicando el teorema del coseno:

$$8^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos \widehat{C} \Rightarrow \cos \widehat{C} = \frac{6^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = -0{,}05 \Rightarrow \widehat{C} = 92°\ 51'\ 58''$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,(92°\ 51'\ 58'')}{8} = \frac{\text{sen}\,\widehat{A}}{6} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{A} = 0{,}749 \Rightarrow \widehat{A} = 48°\ 30'\ 33''$$

$$\widehat{B} = 180° - 92°\ 51'\ 58'' - 48°\ 30'\ 33'' = 38°\ 37'\ 29''$$

8.22 Resuelve los siguientes triángulos, de los que se conocen dos ángulos y un lado.

a) $AC = 5$ cm $\quad \widehat{B} = 45° \quad \widehat{C} = 60°$

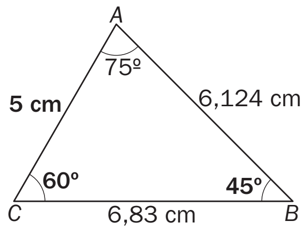
b) $AC = 7{,}1$ cm $\quad \widehat{B} = 40° \quad \widehat{C} = 25°$

a) El ángulo $\widehat{A}$ mide $\widehat{A} = 180° - 45° - 60° = 75°$

Aplicando dos veces el teorema de seno obtenemos:

$$\frac{\text{sen}\,45°}{5} = \frac{\text{sen}\,60°}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5 \cdot \text{sen}\,60°}{\text{sen}\,45°} = 6{,}124 \text{ cm}$$

$$\frac{\text{sen}\,45°}{5} = \frac{\text{sen}\,75°}{BC} \Rightarrow BC = \frac{5 \cdot \text{sen}\,75°}{\text{sen}\,45°} = 6{,}83 \text{ cm}$$

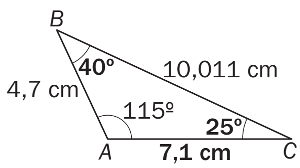


b) El ángulo $\widehat{A}$ mide $\widehat{A} = 180° - 25° - 40° = 115°$

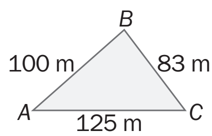
Aplicando dos veces el teorema de seno obtenemos:

$$\frac{\text{sen}\,40°}{7{,}1} = \frac{\text{sen}\,25°}{AB} \Rightarrow AB = \frac{7{,}1 \cdot \text{sen}\,25°}{\text{sen}\,40°} = 4{,}668 \text{ cm}$$

$$\frac{\text{sen}\,40°}{7{,}1} = \frac{\text{sen}\,115°}{BC} \Rightarrow BC = \frac{7{,}1 \cdot \text{sen}\,115°}{\text{sen}\,40°} = 10{,}011 \text{ cm}$$



8.23 Calcula la medida de los tres ángulos del triángulo de la figura.



Aplicando el teorema del coseno:

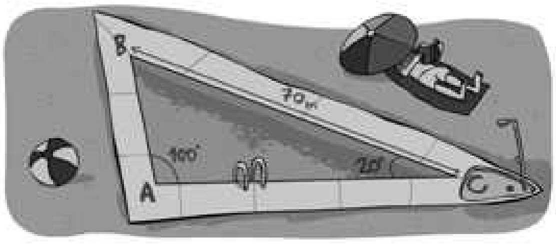
$$125^2 = 100^2 + 83^2 - 2 \cdot 100 \cdot 83 \cdot \cos \widehat{B} \Rightarrow \cos \widehat{B} = \frac{100^2 + 83^2 - 125^2}{2 \cdot 100 \cdot 83} = 0{,}076 \Rightarrow \widehat{B} = 85°\ 37'\ 59''$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,(85°\ 37'\ 59'')}{125} = \frac{\text{sen}\,\widehat{C}}{100} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{C} = 0{,}798 \Rightarrow \widehat{C} = 52°\ 54'\ 32''$$

$$\widehat{A} = 180° - 85°\ 37'\ 59'' - 52°\ 54'\ 32'' = 41°\ 27'\ 29''$$

8.24 Calcula el perímetro de la piscina triangular de la figura.



Aplicando el teorema del seno obtenemos los lados *b* y *c*.

$$\frac{\text{sen}\,100^\circ}{70} = \frac{\text{sen}\,20^\circ}{c} \Rightarrow c = \frac{70 \cdot \text{sen}\,20^\circ}{\text{sen}\,100^\circ} = 24{,}311 \text{ m}$$

$$\frac{\text{sen}\,100^\circ}{70} = \frac{\text{sen}\,60^\circ}{b} \Rightarrow b = \frac{70 \cdot \text{sen}\,60^\circ}{\text{sen}\,100^\circ} = 61{,}557 \text{ m}$$

El perímetro será $70 + 61{,}557 + 24{,}311 = 155{,}868$ m.

8.25 Observa el dibujo y calcula la distancia a la que se encuentra la cima de la montaña.

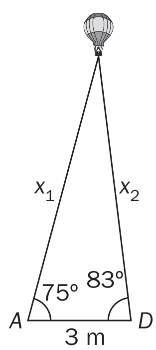
Si *x* es la distancia pedida, aplicando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{\text{sen}\,30^\circ}{x} = \frac{\text{sen}\,25^\circ}{100} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot \text{sen}\,30^\circ}{\text{sen}\,25^\circ} = 118{,}31 \text{ m}$$

8.26 Un globo sobrevuela una ciudad. Alberto lo observa con un ángulo de elevación de 75°, y David, con un ángulo de elevación de 83°. Alberto y David se encuentran a 3 metros el uno del otro.

a) Calcula a qué distancia se encuentra el globo de cada uno de ellos.

b) ¿A qué altura vuela el globo?



a) La distancia x_1 de David al globo la calculamos con el teorema del seno:

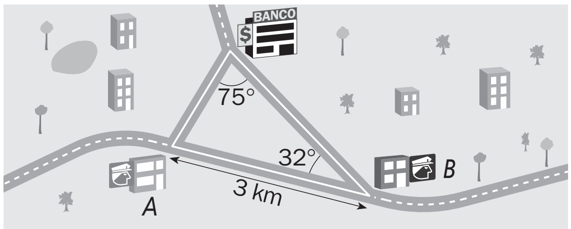
$$\frac{\text{sen}\,(180^\circ - 83^\circ - 75^\circ)}{3} = \frac{\text{sen}\,75^\circ}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{3 \cdot \text{sen}\,75^\circ}{\text{sen}\,22^\circ} = 7{,}736 \text{ m}$$

Del mismo modo obtenemos la distancia x_2 de Alberto al globo:

$$\frac{\text{sen}\,22^\circ}{3} = \frac{\text{sen}\,83^\circ}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{3 \cdot \text{sen}\,83^\circ}{\text{sen}\,22^\circ} = 7{,}949 \text{ m}$$

b) La altura *h* del globo será $h = 7{,}949 \cdot \text{sen}\,75^\circ = 7{,}678$ m.

8.27 Cuando en la sucursal bancaria de la figura suena una alarma, la señal se recibe en las dos comisarías más cercanas. Los policías de la comisaría *A* acuden al banco a una velocidad de 90 kilómetros por hora, y los de la comisaría *B* lo hacen a 100 kilómetros por hora. ¿Qué policías llegarán primero?



La distancia d_1 de la comisaría *A* al banco la calculamos utilizando el teorema del seno

$$\frac{\text{sen}\,75°}{3} = \frac{\text{sen}\,32°}{d_1} \Rightarrow d_1 = \frac{3\,.\,\text{sen}\,32°}{\text{sen}\,75°} = 1{,}646 \text{ km}$$

Los policías tardarán en llegar al banco: $t = \frac{e}{v} = \frac{1{,}646}{90} = 0{,}018\ h = 1 \text{ min } 5{,}84 \text{ s}$

La distancia d_2 de la comisaría *B* al banco la obtenemos con el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,75°}{3} = \frac{\text{sen}\,(180° - 75° - 32°)}{d_2} \Rightarrow d_2 = \frac{3\,.\,\text{sen}\,73°}{\text{sen}\,75°} = 2{,}970 \text{ km}$$

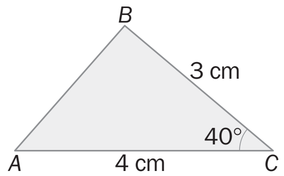
Tardarán en llegar $t = \frac{e}{v} = \frac{2{,}970}{100} = 0{,}029\ h = 1 \text{ min } 44{,}4 \text{ s}$, con lo que llegarán más tarde.

Resolución de triángulos cualesquiera II

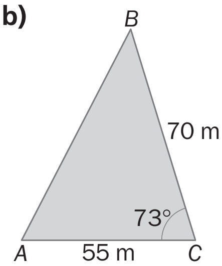
PARA PRACTICAR

8.28 Resuelve los siguientes triángulos, de los que se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

a)



b)



a) Aplicando el teorema del coseno:

$c^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 40° \Rightarrow c^2 = 6{,}615$

$\Rightarrow c = 2{,}572$ cm

Aplicando el teorema del seno:

$\frac{\text{sen}\,40°}{2{,}572} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{4} \Rightarrow \widehat{B} = 88°\ 31'\ 38''$

$\widehat{A} = 180° - 40° - 88°\ 31'\ 38'' = 51°\ 28'\ 22''$

b) Aplicando el teorema del coseno:

$c^2 = 55^2 + 70^2 - 2 \cdot 55 \cdot 70 \cdot \cos 73° \Rightarrow c = 75{,}324$ m

Aplicando el teorema del seno:

$\frac{\text{sen}\,73°}{75{,}324} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{55} \Rightarrow \widehat{B} = 44°\ 17'\ 19''$

$\widehat{A} = 180° - 73° - 44°\ 17'\ 19'' = 62°\ 42'\ 41''$

8.29 Resuelve los siguientes triángulos, de los que se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

a) $AC = 22$ cm $\quad BC = 3$ cm $\quad \widehat{C} = 40°$

b) $BC = 122$ m $\quad AB = 200$ m $\quad \widehat{B} = 120°$

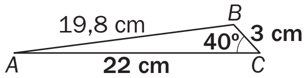
a) Aplicando el teorema del coseno:

$AB^2 = 22^2 + 3^2 - 2 \cdot 22 \cdot 3 \cdot \cos 40° \Rightarrow AB = 19{,}796$ cm

Aplicando el teorema del seno:

$\frac{\text{sen}\,40°}{19{,}796} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{22} \Rightarrow \widehat{B} = 45°\ 35'\ 25''$

$\widehat{A} = 180° - 40° - 45°\ 35'\ 25'' = 94°\ 24'\ 35''$



b) Aplicando el teorema del coseno:

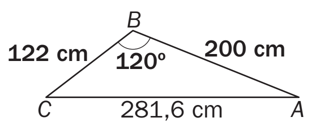
$AC^2 = 122^2 + 200^2 - 2 \cdot 122 \cdot 200 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$AC = 281{,}574$ m

Aplicando el teorema del seno: $\frac{\text{sen}\,120°}{281{,}574} = \frac{\text{sen}\,\widehat{C}}{200}$

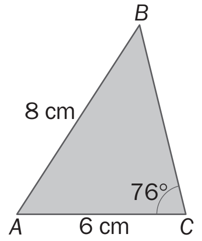
$\widehat{C} = 37°\ 57'\ 41''$

$\widehat{A} = 180° - 120° - 37°\ 57'\ 41'' = 22°\ 2'\ 19''$

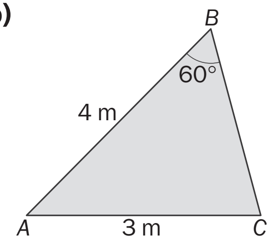


8.30 **Resuelve los siguientes triángulos, de los que se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.**

a)



b)



a) Por el teorema del coseno tenemos que:

$8^2 = 6^2 + a^2 - 2 \cdot 6 \cdot a \cdot \cos 76° \Rightarrow a^2 - 2{,}9\,a - 28 = 0 \Rightarrow a = 6{,}937$ cm

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,76°}{8} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{6} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{B} = 0{,}728 \Rightarrow \widehat{B} = 46°\,41'\,45''$$

$\widehat{A} = 180° - 76° - 46°\,41'\,45'' = 57°\,18'\,15''$

b) Por el teorema del seno tenemos que:

$$\frac{\text{sen}\,60°}{3} = \frac{\text{sen}\,\widehat{C}}{3{,}4} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{C} = 0{,}981 \Rightarrow \widehat{C} = 78°\,57'\,38''$$

$\widehat{A} = 180° - 60° - 78°\,57'\,38'' = 41°\,2'\,22''$

Aplicando de nuevo el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,60°}{3} = \frac{\text{sen}\,(41°\,2'\,22'')}{a} \Rightarrow a = 2{,}274 \text{ cm}$$

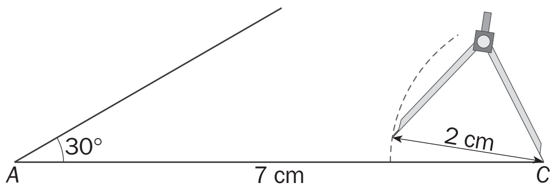
Ejercicio resuelto

8.31 **Comprueba que no puede existir un triángulo con los siguientes datos y verifica gráficamente el resultado:**
$\widehat{A} = 30°$ $\quad a = 2$ cm $\quad b = 7$ cm

Se aplica el teorema del seno, obtenemos que:

$$\frac{\text{sen}\,30°}{2} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{7} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{B} = \frac{7 \cdot \text{sen}\,30°}{2} = 1{,}75$$

que es imposible, ya que el seno de un ángulo no puede tener un valor superior a 1.

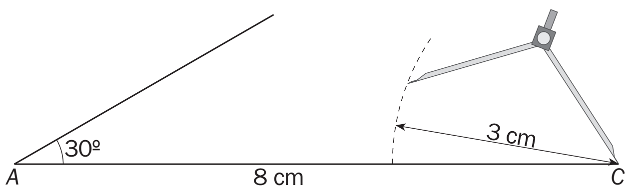


8.32 **Comprueba que no puede existir un triángulo con los siguientes datos y verifica gráficamente el resultado:**
$\widehat{A} = 30°$ $\quad a = 3$ cm $\quad b = 8$ cm

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,30°}{3} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{8} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{B} = \frac{8 \cdot \text{sen}\,30°}{3} = 1{,}\widehat{3}$$

que es imposible, ya que el seno de un ángulo no puede tener un valor superior a 1.



8.33 a) Comprueba que hay dos triángulos con $\widehat{A} = 30°$ $a = 3$ cm $b = 4$ cm.

b) Resuelve los dos triángulos posibles y clasifícalos según sus ángulos.

c) Verifica gráficamente los resultados anteriores.

a) Aplicando el teorema del coseno:

$3^2 = 4^2 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 30° \Rightarrow c^2 - 6{,}93\, c + 7 = 0 \Rightarrow c_1 = 1{,}228$ cm y $c_2 = 5{,}7$ cm

Como se obtienen dos posibles valores para el lado c del triángulo, se pueden construir dos triángulos distintos para los datos dados.

b) Para c_1, aplicando el teorema del seno se obtiene:

$$\frac{\text{sen}\, 30°}{3} = \frac{\text{sen}\, \widehat{C}}{1{,}228} \Rightarrow \text{sen}\, \widehat{C} = 0{,}205 \Rightarrow \widehat{C} = 11°\ 48'\ 36''$$

$\widehat{A} = 180° - 30° - 11°\ 48'\ 36'' = 138°\ 11'\ 24''$

El triángulo es obtusángulo, ya que el ángulo $\widehat{A}$ es mayor de 90°.

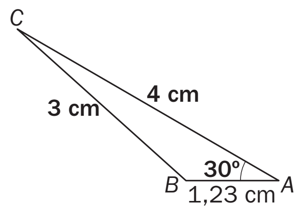
Para c_2, aplicando el teorema del seno se obtiene:

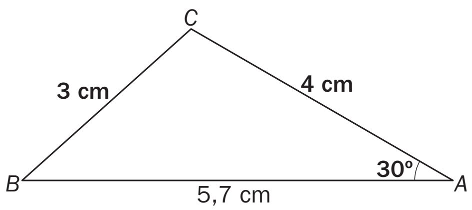
$$\frac{\text{sen}\, 30°}{3} = \frac{\text{sen}\, \widehat{C}}{5{,}7} \Rightarrow \text{sen}\, \widehat{C} = 0{,}95 \Rightarrow \widehat{C} = 71°\ 48'\ 18''$$

$\widehat{A} = 180° - 30° - 71°\ 48'\ 18'' = 78°\ 11'\ 42''$

El triángulo es acutángulo.

c)





PARA APLICAR

8.34 Dos corredoras entrenan a una velocidad de 9 kilómetros por hora. Llegan juntas a un cruce de caminos que forman entre sí un ángulo de 60° y cada una toma un camino. ¿Qué distancia las separará dentro de una hora?

En una hora, cada una habrá recorrido 9 kilómetros, por lo que formarán un triángulo con un ángulo de 60° y los dos lados adyacentes de 9 kilómetros. Para calcular la distancia que las separa basta con aplicar el teorema del coseno:

$a^2 = 9^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cos 60° \Rightarrow a = 9$ kilómetros

8.35 Carlos y Yago salen con sus motos a la vez de un cruce de carreteras que forman un ángulo de 55°. Carlos circula a 80 kilómetros por hora, y Yago lo hace a 90 kilómetros por hora. ¿Qué distancia les separará al cabo de media hora?

El espacio recorrido se calcula a partir de: $e = v \cdot t$, por lo que Carlos, a la media hora, ha recorrido 40 km y Yago, 45 km. Se aplica el teorema del coseno para calcular la distancia que los separa:

$x^2 = 40^2 + 45^2 - 2 \cdot 40 \cdot 45 \cdot \cos 55° = 1560{,}125 \Rightarrow x = 39{,}498$ km

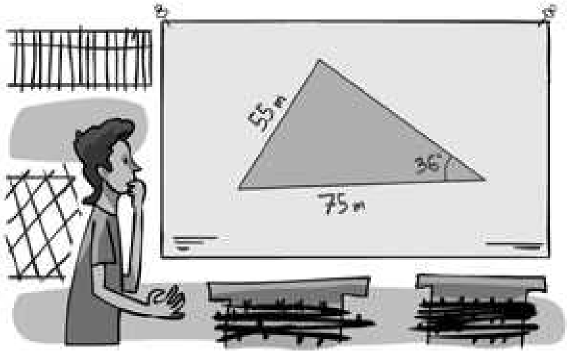
8.36 Dos de los lados de un paralelogramo miden 6 y 8 centímetros, respectivamente, y forman un ángulo de 32°. ¿Cuánto miden sus diagonales?

Para cada diagonal, d y D, se aplica el teorema del coseno:

$d^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 32° = 18{,}587 \Rightarrow d = 4{,}311$ cm

$D^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 148° = 181{,}41 \Rightarrow D = 13{,}469$ cm

8.37 Álvaro tiene que vallar una parcela triangular. Fíjate en el croquis que ha hecho con las medidas de la parcela.



¿Tiene suficientes datos para calcular los metros exactos de alambrada que va a necesitar? Justifica tu respuesta.

En un principio tiene suficientes datos, porque puede aplicar el teorema del coseno para calcular el lado que le falta:

$55^2 = 75^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 75 \cos 32° \Rightarrow x^2 - 127{,}207\, x - 2600 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 25{,}585$ cm y $x_2 = 101{,}622$ cm

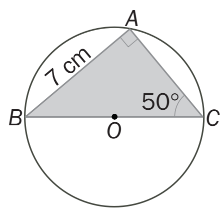
Como obtiene dos resultados, al quedarle una ecuación de 2.º grado, no puede determinar cuál de las dos medidas es la correcta y, por tanto, no son suficientes.

Cálculo de longitudes y áreas

P A R A   P R A C T I C A R

Ejercicio resuelto

8.38 Halla la longitud de la circunferencia de la figura.



Como el ángulo $\widehat{A}$ abarca un diámetro, el triángulo ABC es rectángulo en A.

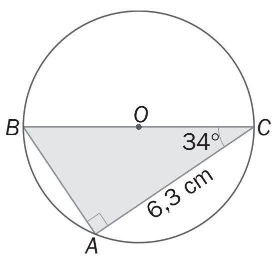
Se utiliza la trigonometría para hallar el diámetro de la circunferencia.

$\text{sen}\, 50° = \dfrac{7}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{7}{\text{sen}\, 50°} = 9{,}14$ cm

Así, la longitud de la circunferencia es:

$L = 2\pi r = BC \cdot \pi = 9{,}14 \cdot \pi = 28{,}71$

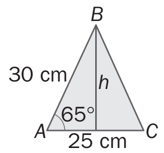
8.39 Halla la longitud y el área de la siguiente circunferencia.



Se tiene que $BC = \dfrac{6{,}3}{\cos 34°} = 7{,}599$ cm, con lo que el radio de la circunferencia es $\dfrac{7{,}599}{2} = 3{,}8$ cm.

Su área: $\pi \cdot 3{,}8^2 = 45{,}353$ cm^2 y su longitud: $2\pi \cdot 3{,}8 = 23{,}876$ cm

8.40 Dado el triángulo *ABC* de la figura, calcula:



a) Su altura, *h*.

b) Su área.

c) Su perímetro.

a) $h = 30 \operatorname{sen} 65° = 27{,}189$ cm

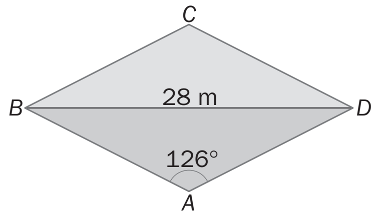
b) $A = \dfrac{25 \cdot 27{,}189}{2} = 339{,}863 \text{ cm}^2$

c) El lado desconocido a se calcula por el teorema del coseno: $a^2 = 30^2 + 25^2 - 2 \cdot 30 \cdot 25 \cdot \cos 65° = 891{,}07$;
$a = 29{,}85$ cm. Luego, su perímetro será $25 + 30 + 29{,}85 = 84{,}85$ cm.

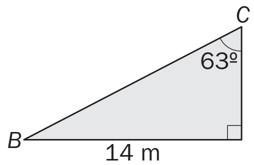
8.41 Considera el rombo *ABCD* de la figura.

a) Calcula el área del rombo.

b) Calcula el perímetro del rombo aplicando el teorema del seno al triángulo *ABD*.



Se divide el rombo en cuatro triángulos rectángulos como este:



a) Se calcula el área de uno de los triángulos y se multiplica por 4:

$b = \dfrac{14}{\operatorname{tg} 63°} = 7{,}13$ m, con lo que el área del triángulo es $A = \dfrac{7{,}13 \cdot 14}{2} = 49{,}91 \text{ m}^2$.

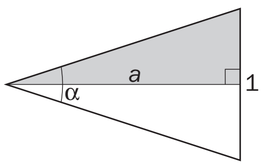
El área del rombo es $4 \cdot 49{,}91 = 199{,}64 \text{ m}^2$.

b) Como se puede ver en el dibujo, el ángulo $\widehat{A}$ mide 27°, por lo que aplicando el teorema del seno:

$\dfrac{\operatorname{sen} 126°}{28} = \dfrac{\operatorname{sen} 27°}{a} \Rightarrow a = 15{,}712$ m, por tanto, el perímetro es $4 \cdot 15{,}713 = 62{,}852$ m.

8.42 Calcula el área de un decágono regular de 1 metro de lado.

El decágono se pude dividir en 10 triángulos isósceles como este:



El ángulo α mide $\dfrac{360°}{10} = 36°$, por lo que la apotema del decágono mide
$a = \dfrac{0{,}5}{\operatorname{tg} 18°} = 1{,}54$ m.
El área del triángulo mide $\dfrac{1{,}54 \cdot 1}{2} = 0{,}77 \text{ m}^2$, con lo que el área del decágono es $7{,}7 \text{ m}^2$.

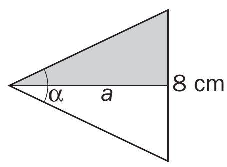
8.43 Considera un heptágono regular de 8 centímetros de lado.

a) Calcula la medida del radio de la circunferencia inscrita al heptágono.

b) ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita al heptágono?

c) Calcula el área del heptágono.

El heptágono se puede dividir en 7 triángulos isósceles como este:



a) El ángulo α mide $\dfrac{360°}{7} = 51{,}43°$.

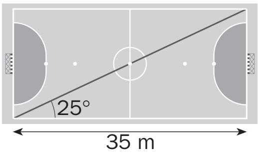
La longitud del radio de la circunferencia inscrita coincide con la apotema, que mide:

$$a = \frac{4}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4}{\operatorname{tg}(25{,}71°)} = 8{,}31 \text{ cm.}$$

b) El radio de la circunferencia circunscrita coincide con el lado del triángulo: $\sqrt{4^2 + 8{,}31^2} = 9{,}22$ cm.

c) El área del triángulo es $\dfrac{8 \cdot 8{,}31}{2} = 33{,}24 \text{ cm}^2$, con lo que el área del heptágono es $7 \cdot 33{,}24 = 232{,}68 \text{ cm}^2$.

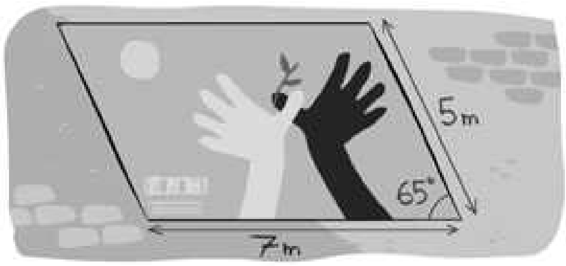
8.44 El campo de fútbol sala de un instituto es rectangular. Observa las medidas señaladas en la figura y calcula su área.



El lado desconocido del rectángulo mide 35 tg 25° = 16,32 m.

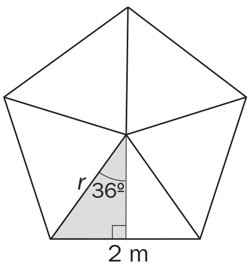
Su área es 16,32 · 35 = 571,23 m².

8.45 Para conseguir nuevos socios, una ONG ha diseñado este cartel publicitario. Calcula su área.



La superficie del cartel publicitario es $7 \cdot 5 \cdot \text{sen}\,65° = 31{,}72\ \text{m}^2$.

8.46 Una estatua se encuentra delimitado por cinco postes que son los vértices de un pentágono regular de 2 metros de lado. Calcula el área de la circunferencia que pasa por los cinco postes.

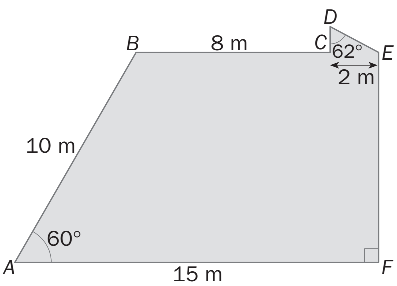


La circunferencia pedida es la circunscrita al pentágono, que se puede dividir en 5 triángulos como este:

El radio de la circunferencia coincide con el lado del triángulo:

$r = \dfrac{1}{\text{sen}\,36°} = 1{,}7$ m. Su área será: $A = \pi\,(1{,}7)^2 = 9{,}09\ \text{m}^2$.

8.47 El dibujo muestra el plano de un local. El local se encuentra en venta, y el precio de cada metro cuadrado es de 3500 euros. ¿Cuál es el precio del local?



Dividimos la figura en tres regiones:

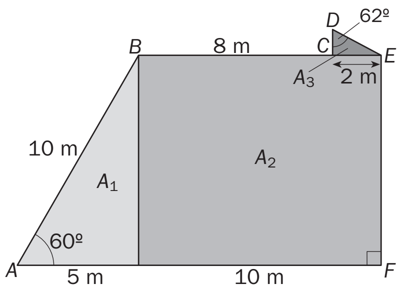
$$A_1 = \frac{5 \cdot 10 \cdot \text{sen}\,60°}{2} = 21{,}651\ \text{m}^2$$

$$A_2 = 10 \cdot \text{sen}\,60° \cdot 10 = 86{,}602\ \text{m}^2$$

$$A_3 = \frac{2 \cdot \dfrac{2}{\text{tg}\,62°}}{2} = \frac{2}{\text{tg}\,62°} = 1{,}063\ \text{m}^2$$

$$A_{\text{total}} = 21{,}651 + 86{,}602 + 1{,}063 = 109{,}316\ \text{m}^2$$

El precio es: 109,316 · 3500 = 382 606 €



Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

8.48 Calcula el volumen del cono de la figura.

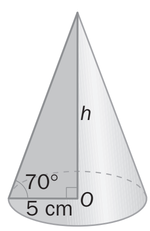
Como la base es una circunferencia de 10 centímetros de diámetro, tenemos que:

$A_{\text{base}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 25 = 78{,}54\ \text{cm}^2$

Para hallar el volumen del cono es necesario calcular su altura, *h*.

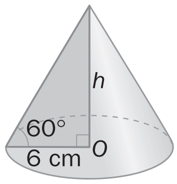
Se utiliza la trigonometría: $\text{tg}\,70° = \dfrac{h}{5} \Rightarrow h = 5 \cdot \text{tg}\,70° = 13{,}74$ cm.

El volumen del cono es: $V = \dfrac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \dfrac{78{,}54 \cdot 13{,}74}{3} = 359{,}671\ \text{cm}^3$.

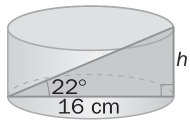


8.49 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a)



b)



a) La altura del cono es $h = 6 \cdot \text{tg}\,60° = 10{,}39$ cm, con lo que el volumen es $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 391{,}78$ cm^3.

b) El radio de la base es $r = 8$ cm y la altura $h = 16 \cdot \text{tg}\,22° = 6{,}46$ cm, con lo que su volumen es $V = \pi 8^2 \cdot 6{,}46 = 1299{,}75$ cm^3.

8.50 Calcula el área del cilindro y el cono de la actividad anterior.

a) El área del cono es el área lateral más el área de la base:

$A_{\text{base}} = \pi 6^2 = 113{,}1$ cm^2

$A_{\text{lateral}} = \pi r g$, como la generatriz es: $g = \dfrac{6}{\cos 60°} = 12$ cm, el $A_{\text{lateral}} = 226{,}19$ cm^2.

$A_T = 113{,}1 + 226{,}19 = 339{,}3$ cm^2

b) El área total será la suma del área lateral y de las dos bases.

$A_{\text{base}} = \pi \cdot 8^2 = 201{,}062$ cm^2

El lateral del cilindro es un rectángulo de base igual a la longitud de la circunferencia. La altura se calculó en el ejercicio anterior y es $h = 16 \cdot \text{tg}\,22° = 6{,}46$ cm: $A_{\text{lateral}} = 2\pi 8 \cdot 6{,}46 = 324{,}715$ cm^2.

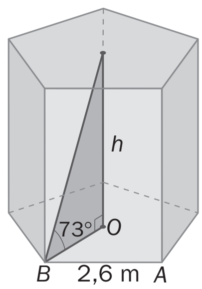
$A_T = 2 \cdot 201{,}062 + 324{,}715 = 726{,}839$ cm^2

8.51 La figura muestra un prisma con base un pentágono regular. Calcula:

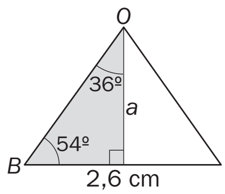
a) Su área lateral.

b) Su área total.

c) Su volumen.



a) El área lateral son 5 rectángulos de área $b \cdot h$. Para calcular la altura del prisma se necesita conocer la distancia OB, para lo que se divide el pentágono de la base en 5 triángulos isósceles como el de la figura.



El lado OB mide $\dfrac{1{,}3}{\cos 54°} = 2{,}212$ cm, así que la altura del prisma será:

$h = 2{,}212 \cdot \text{tg}\,73° = 7{,}235$ cm.

De forma que el área lateral es $5 \cdot 2{,}6 \cdot 7{,}235 = 94{,}06$ cm^2.

b) El área total es la suma de las áreas de las bases y del área lateral calculada antes.

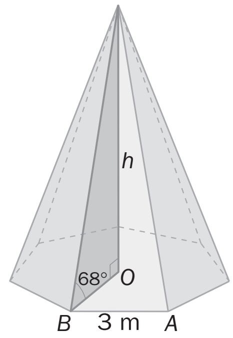
Para determinar el área del pentágono hay que calcular la apotema: $a = 1{,}3 \cdot \text{tg}\,54° = 1{,}789$ cm.

El área del pentágono será $A = \dfrac{2{,}6 \cdot 5 \cdot 1{,}789}{2} = 11{,}628$ cm^2.

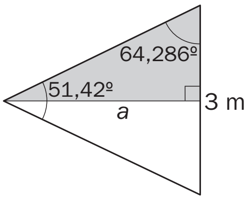
El área total: $A_T = 2 \cdot 11{,}628 + 94{,}06 = 117{,}316$ cm^2

c) $V = A \cdot h = 11{,}628 \cdot 7{,}235 = 84{,}129$ cm^3

8.52 Calcula el volumen de la pirámide de la figura, que tiene como base un heptágono regular de 3 metros de lado.



El heptágono lo podemos dividir en 7 triángulos isósceles como el de la figura:



$a = 1,5 \cdot \operatorname{tg} 64,286^\circ = 3,115$ m

$A_{\text{base}} = \dfrac{7 \cdot 3 \cdot 3,115}{2} = 32,707 \text{ m}^2$

El lado x mide $x = \dfrac{1,5}{\cos 64,286^\circ} = 3,457$ m, con lo que la altura es $h = 3,457 \operatorname{tg} 68^\circ = 8,556$ m.

Su volumen será $V = \dfrac{32,707 \cdot 8,556}{3} = 93,28 \text{ m}^3$.

8.53 Expresa el volumen de un tetraedro regular en función de su lado *a*.

Las medianas y las alturas de un triángulo equilátero miden $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, con lo que el área de la base es: $A_{\text{base}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

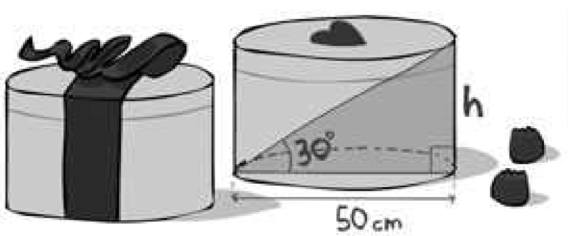
El baricentro de un triángulo equilátero está a un tercio del lado y a dos tercios del vértice.

$$AO = \frac{2}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{20^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

Por tanto, su volumen es $V = \dfrac{1}{3}A_{\text{base}} \cdot h = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\,\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

PARA APLICAR

8.54 Una empresa que fabrica bombones utiliza para su envasado latas con forma de cilindro circular como muestra la figura. Halla el volumen y el área de dichas latas.



El área de la base será $A_{\text{base}} = 25^2$

Su altura será de $h = 50 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 28,87$ cm, con lo que su volumen será de $V = 1963,494 \cdot 28,87 = 56\,686,07 \text{ cm}^3$.

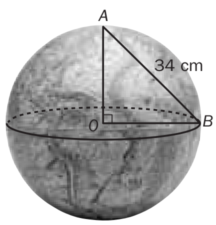
El área de la caja será la de las bases más la lateral:

$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 25^2 + 2\pi \cdot 25 \cdot 28,78 = 8447,74 \text{ cm}^2$

8.55 Halla el volumen de un globo terráqueo como el de la figura.

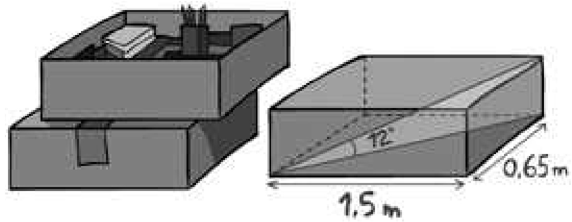
Como AO y OB son radios de la esfera, el ángulo OBA mide 45°. Por tanto,

$OB = 34 \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{34\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 24,042$ cm.



El volumen de la esfera será $V = \dfrac{4}{3}\pi r^2 = 58\,210,325 \text{ cm}^3$.

8.56 El Ayuntamiento de un pueblo ha organizado una campaña de envío de material escolar a países en vías de desarrollo. Han utilizado cajas con forma de ortoedro como las de la figura. Calcula el área y el volumen de cada una de ellas.



El área de la parte de abajo, que será igual que la de arriba, de una caja, es: $A = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$.

Para determinar el área lateral, se necesita la altura del ortoedro, que se obtiene a partir de la diagonal de la base: $d = \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}65^2} = 1{,}635$ m.

Por tanto, la altura del ortoedro es: $h = 1{,}635 \cdot \text{tg}\,12° = 0{,}348$ m.

El área de la caja es: $2A = 2 \cdot (1{,}5 \cdot 0{,}65 + 2 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}348 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}348) = 2 \cdot 2{,}47 = 4{,}94$ m^2.

El volumen del ortoedro es: $V = A_{\text{base}} \cdot h = 1{,}5 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}348 = 0{,}34$ m^3.

8.57 En la pirámide cuadrangular de Keops, el lado de la base mide 230 metros, y el ángulo que forma una cara con la base es de 55°.

Calcula:

a) La altura de la pirámide.

b) El volumen de la pirámide

c) La superficie de cada una de las caras triangulares de la pirámide.

a) $h = 115 \cdot \text{tg}\,55° = 164{,}237$ m

b) $V = \dfrac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} = \dfrac{230^2 \cdot 164{,}237}{3} = 2\,896\,045{,}767$ m^3

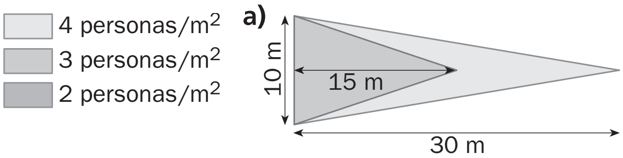
c) La altura de cada cara será $h_1 = \dfrac{115}{\cos 55°} = 200{,}496$ m, con lo que la superficie de cada cara será

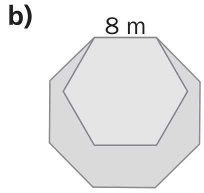
$A = \dfrac{230 \cdot 200{,}496}{2} = 23\,057{,}04$ m^2.

MATEMÁTICAS APLICADAS

PARA APLICAR

8.58 Utiliza en cada caso el plano con las densidades de ocupación para calcular el número de asistentes a un evento.





a) El área del triángulo amarillo es: $\dfrac{10 \cdot 15}{2} = 75$ m^2, y el área sombreada en azul es: $\dfrac{10 \cdot 30}{2} - 75 = 75$ m^2.

Asistieron al evento $3 \cdot 75 + 4 \cdot 75 = 525$ personas.

b) Para calcular el área del hexágono rosa es necesario conocer su apotema, para lo que dividimos el hexágono en seis triángulos isósceles, de forma que la apotema es: $a_p = \dfrac{4}{\text{tg}\,30°} = 6{,}93$ m, y el área: $\dfrac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}28$ m^2. Para calcular el área sombreada en azul, se procede del mismo modo, solo que en este caso salen 8 triángulos isósceles, por lo que la apotema será: $a_p = \dfrac{4}{\text{tg}\,22{,}5°} = 9{,}66$ m, y el área: $\dfrac{8 \cdot 8 \cdot 9{,}66}{2} - 166{,}28 = 142{,}84$ m^2. Asistieron al evento $2 \cdot 166{,}28 + 4 \cdot 142{,}84 = 904$ personas.

P A R A   P R A C T I C A R   Y   A P L I C A R

8.59 En un triángulo rectángulo, un cateto mide 9 centímetros, y la hipotenusa, 14. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Por el teorema de Pitágoras, el cateto medirá: $14 = \sqrt{9^2 + x^2} \Rightarrow 14^2 - 9^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{115} = 10{,}72$ cm.

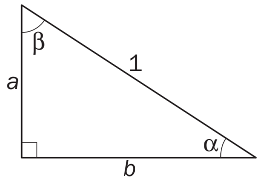
8.60 Calcula la medida de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles si la hipotenusa mide 10 centímetros.

Por el teorema de Pitágoras, los catetos medirán: $10 = \sqrt{x^2 + x^2} \Rightarrow \dfrac{10^2}{2} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm.

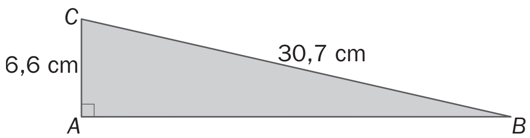
8.61 Explica razonadamente si existen triángulos rectángulos en los que los senos de los ángulos agudos coincidan con la medida de los lados opuestos.

Sí, en los que tienen hipotenusa 1.

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{a}{1} = a$ $\qquad$ $\text{sen}\,\beta = \dfrac{b}{1} = b$



8.62 Dado el siguiente triángulo rectángulo *ABC*:



a) Calcula el lado desconocido. ¿Qué resultado has utilizado?

b) Aplica las razones trigonométricas para hallar los ángulos agudos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$.

a) Aplicando el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{30{,}7^2 - 6{,}6^2} = 29{,}98$ cm.

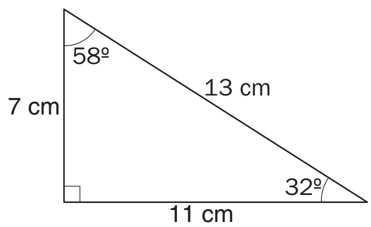
b) $\cos\widehat{C} = \dfrac{6{,}6}{30{,}7} = 0{,}215 \Rightarrow \widehat{C} = 77^\circ\ 35'\ 8''$

$\widehat{B} = 90^\circ - 77^\circ\ 35'\ 8'' = 12^\circ\ 24'\ 52''$

8.63 a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 11 centímetros, respectivamente.

b) Calcula la medida de la hipotenusa y de los ángulos agudos del triángulo, y comprueba con la regla y el transportador que los resultados que has obtenido son correctos.

a)



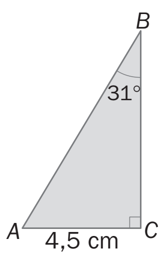
b) Aplicando el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{7^2 + 11^2} = 13{,}04$ cm

$\text{tg}\,\widehat{A} = \dfrac{7}{11} = 0{,}\widehat{63} \Rightarrow \widehat{A} = 32^\circ\ 28'\ 16''$

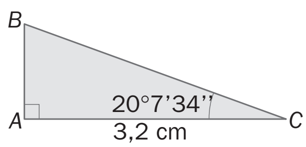
$\widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ\ 28'\ 16'' = 57^\circ\ 31'\ 44''$

8.64 Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a)



b)



a) $\widehat{A} = 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$

$a = \dfrac{4{,}5}{\text{tg}\,31^\circ} = 7{,}5$ cm

$c = \sqrt{4{,}5^2 + 7{,}5^2} = 8{,}75$ cm

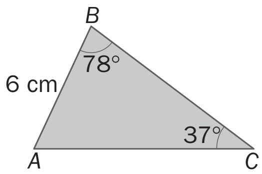
b) $\widehat{A} = 90^\circ - 20^\circ\ 7'\ 34'' = 69^\circ\ 52'\ 26''$

$c = 3{,}2 \cdot \text{tg}\,(20^\circ\ 7'\ 34'') = 1{,}17$ cm

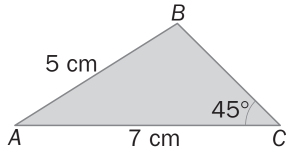
$a = \sqrt{1{,}17^2 + 3{,}2^2} = 3{,}41$ cm

8.65 Señala los elementos conocidos de los siguientes triángulos. Resuélvelos explicando los resultados que utilizas.

a)



b)



a) $\widehat{A} = 180° - 37° - 78° = 65°$

Por el teorema del seno se tiene:

$$\frac{6}{\text{sen}\,37°} = \frac{a}{\text{sen}\,65°} = \frac{b}{\text{sen}\,78°}$$

$$a = \frac{6 \cdot \text{sen}\,65°}{\text{sen}\,37°} = 9{,}036 \text{ cm}$$

$$b = \frac{6 \cdot \text{sen}\,78°}{\text{sen}\,37°} = 9{,}752 \text{ cm}$$

b) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,45°}{5} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{7}$$

$\text{sen}\,\widehat{B} = 0{,}99 \Rightarrow \widehat{B} = 81°\ 52'\ 12''$

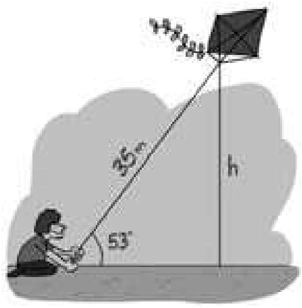
$\widehat{A} = 180° - 45° - 81°\ 52'\ 12'' = 53°\ 7'\ 48''$

Por el teorema del coseno:

$a^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cos 53°\ 7'\ 48'' \Rightarrow a = 5{,}66$ cm

8.66 Calcula la altura de la cometa con la que está jugando Antonio.

$h = 35 \cdot \text{sen}\,53° = 27{,}952$ m

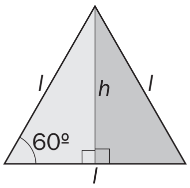


8.67 Expresa la altura y el área de un triángulo equilátero en función del lado *l*.

a) Utilizando únicamente el teorema de Pitágoras.

b) Utilizando únicamente trigonometría.

Se divide el triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos:



a) La altura mide $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{3l^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$

Su área será $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l \cdot l = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$

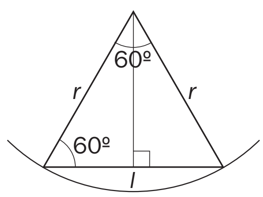
b) La altura mide $h = l \cdot \text{sen}\,60° = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. El área será $A = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2.$

8.68 Comprueba que en un hexágono regular, el radio de la circunferencia circunscrita coincide con la longitud del lado.

El hexágono lo podemos dividir en seis triángulos isósceles iguales

$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$ $\qquad \beta = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$

El triángulo es equilátero, es decir, $r = l$, como queríamos probar.



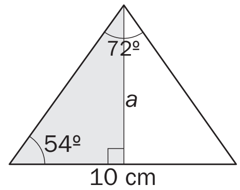
8.69 Considera un pentágono regular de 10 centímetros de lado.

a) Calcula la medida del radio de la circunferencia inscrita.

b) ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita?

c) Calcula el área del pentágono.

El pentágono se puede dividir en cinco triángulos isósceles iguales como este:



a) El radio circunferencia inscrita coincide con la apotema:

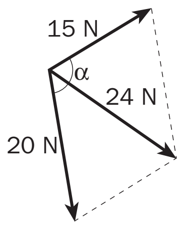
$a = 5\ \text{tg}\,54° = 6{,}882$ cm

b) El radio circunferencia circunscrita coincide con el lado del triángulo:

$R = \dfrac{5}{\cos 54°} = 8{,}507$ cm

c) $A = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}882}{2} = 172{,}05\ \text{cm}^2$

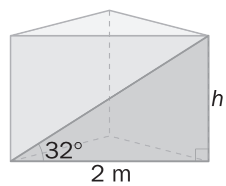
8.70 La resultante de dos fuerzas de 15 y 20 newtons, respectivamente, es una fuerza de 24 newtons. Representa gráficamente la situación y calcula el ángulo que forman las dos fuerzas entre sí.



Para hallar la representación gráfica aplicamos la ley del paralelogramo.

El ángulo que forman las dos fuerzas iniciales es el suplementario del otro ángulo del paralelogramo de la figura. Éste puede ser calculado a través del teorema del coseno: $24^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \dfrac{49}{600} = 0{,}082 \Rightarrow \beta = 85°\ 17'\ 47''$, y así el ángulo pedido es $\alpha = 94°\ 42'\ 13''$.

8.71 La base del prisma de la figura es un triángulo equilátero de 2 metros de lado. Calcula su área lateral y su volumen.

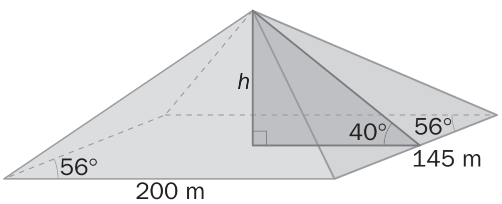


Calculemos el área de la base: $A_{\text{base}} = \dfrac{1}{2} 2 \cdot 2\ \text{sen}\,60° = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \text{m}^2$.

Su altura será: $h = 2\ \text{tg}\,32° = 1{,}25$ m.

Su volumen es: $V = A_{\text{base}} \cdot h = \sqrt{3} \cdot 1{,}25 = 2{,}16\ \text{m}^3$.

8.72 Se ha construido un centro comercial con forma de pirámide cuya base es un paralelogramo. Calcula el volumen del centro comercial teniendo en cuenta los datos de la figura.



Área de la base:

$A_{\text{base}} = 200 \cdot 145\ \text{sen}\,56° = 24\,042{,}09\ \text{m}^2$

Altura de la pirámide: $h = 100\ \text{tg}\,40° = 83{,}91$ m

Por tanto, su volumen es:

$V = \dfrac{24\,042{,}09\ .\ 83{,}91}{3} = 672\,457{,}25\ \text{m}^3$.

8.73 Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 30° 12′ 25″. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo?

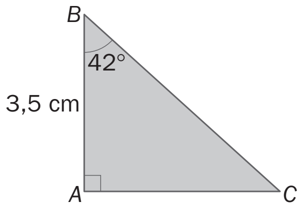
Será su complementario, es decir, $90° - 30°\ 12'\ 25'' = 59°\ 47'\ 35''$.

8.74 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 10 centímetros, respectivamente. Calcula la medida de la hipotenusa.

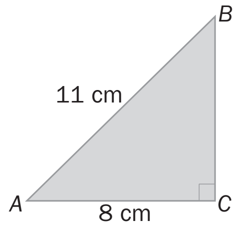
Aplicando el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{3^2 + 10^2} = 10{,}44$ cm.

8.75 Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a)



b)



a) $\widehat{C} = 90° - 42° = 48°$

$b = 3{,}5 \cdot \operatorname{tg} 42° = 3{,}15$ cm

$a = \dfrac{3{,}5}{\cos 42°} = 4{,}71$ cm

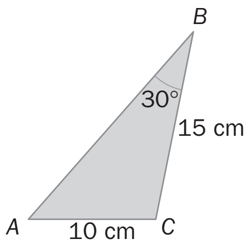
b) $a = \sqrt{11^2 - 8^2} = 7{,}55$ cm

$\cos\widehat{A} = \dfrac{8}{11} = 0{,}73 \Rightarrow \widehat{A} = 43°\ 20'\ 30''$

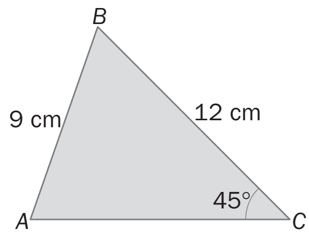
$\widehat{B} = 90° - 43°\ 20'\ 30'' = 46°\ 39'\ 30''$

8.76 Aplica el teorema del seno para calcular el ángulo $\widehat{A}$ de los siguientes triángulos.

a)



b)



a) $\dfrac{\operatorname{sen} 30°}{10} = \dfrac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{15}$

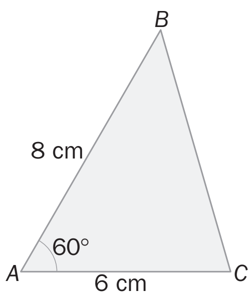
$\operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}75 \Rightarrow \widehat{A} = 48°\ 35'\ 25''$

b) $\dfrac{\operatorname{sen} 45°}{9} = \dfrac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{12}$

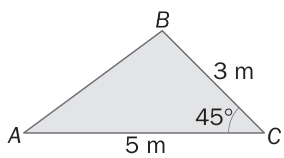
$\operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}943 \Rightarrow \widehat{A} = 70°\ 31'\ 44''$

8.77 Aplica el teorema del coseno para hallar el lado desconocido de los siguientes triángulos.

a)



b)



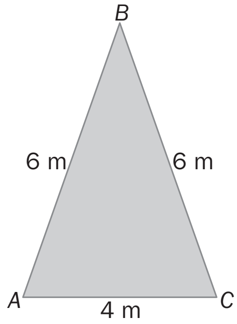
a) $a^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cos 60°$

$a = 7{,}21$ cm

b) $c^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 45°$

$c = 3{,}58$ cm

8.78 Calcula el área del triángulo de la figura.



La altura mide $h = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 5{,}657$ m.

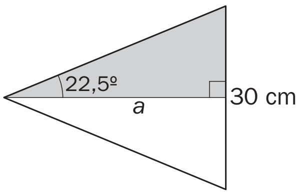
Su área es $A = \dfrac{4 \cdot 5{,}657}{2} = 11{,}314 \text{ m}^2$.

8.79 Cuando los rayos solares tienen una inclinación de 25° sobre la horizontal, la sombra de un árbol mide 3,6 metros. ¿Cuál es la altura del árbol?

$h = 3{,}6 \text{ tg}\,25° = 1{,}679$ m

8.80 El tablero de un juego de mesa tiene forma de octógono regular de 30 centímetros de lado. Calcula su área.

Para calcular el área del octógono hay que calcular la apotema, para lo que se divide en 8 triángulos isósceles como el de la figura:

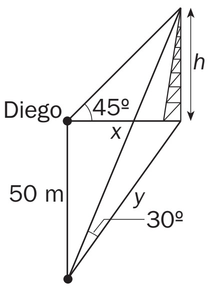


$a = \dfrac{15}{\text{tg}\,22{,}5°} = 36{,}21$ cm

El área del octógono será: $A = \dfrac{8 \cdot 30 \cdot 36{,}21}{2} = 4345{,}58 \text{ cm}^2$.

PARA AMPLIAR

8.81 Diego, que está situado al oeste de una emisora de radio, observa que su ángulo de elevación es de 45°. Camina 50 metros hacia el sur y comprueba que el ángulo de elevación es ahora de 30°. Calcula la altura de la antena.

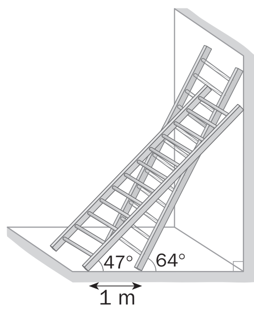


En el esquema se pueden ver tres triángulos rectángulos.

La altura se obtiene a partir de dos de ellos:

$$\left.\begin{array}{l} h = x \cdot \text{tg}\,45° \Rightarrow x = \dfrac{h}{\text{tg}\,45°} = h \\ h = y \cdot \text{tg}\,30° \Rightarrow y = \dfrac{h}{\text{tg}\,30°} = h\sqrt{3} \\ x^2 + 50^2 = y^2 \end{array}\right\} h^2 + 50^2 = 3h^2 \Rightarrow 2h^2 = 50^2 \Rightarrow h = \dfrac{50}{\sqrt{2}} = 35{,}36 \text{ m}$$

8.82 Una escalera está apoyada sobre la pared formando un ángulo sobre la horizontal de 47°. Si la apoyamos un metro más cerca de la pared, el ángulo que forma con la horizontal es de 64°. ¿Cuál es la longitud de la escalera?



Si x es la longitud de la escalera, que coincide con la hipotenusa de los dos triángulos rectángulos, y d la distancia a la pared, se tiene:

$$\cos 47° = \frac{d}{x} \Rightarrow d = x \cos 47°$$

$$\cos 64° = \frac{d - 1}{x} \Rightarrow d = x \cos 64° + 1$$

$$x \cos 47° = x \cos 64° + 1 \Rightarrow x \cos 47° - x \cos 64° = 1 \Rightarrow 0{,}244x = 1 \Rightarrow x = 4{,}1 \text{ m}$$

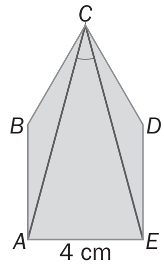
8.83 Desde una cierta distancia se ve un edificio con un ángulo de 68°. ¿Con qué ángulo se verá el mismo edificio si nos alejamos de manera que estemos al doble de distancia?

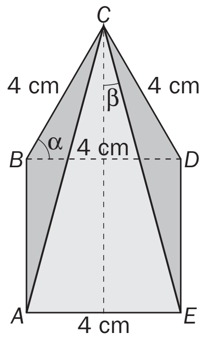
Si h es la altura del edificio y x la distancia, se tiene que $\text{tg}\,68° = \frac{h}{x}$ y la tangente del ángulo pedido es $\text{tg}\,\alpha = \frac{h}{2x}$.

Despejando h de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, se llega a:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{x \cdot \text{tg}\,68°}{2x} = \frac{\text{tg}\,68°}{2} = 1{,}237 \Rightarrow \alpha = 51°\ 3'\ 36''$$

8.84 Todos los lados del pentágono de la figura miden 4 centímetros. Calcula la medida del ángulo *ACE* y la longitud del segmento *AC*.





Para calcular el ángulo $\widehat{B}$, que va a ser igual al $\widehat{D}$, se divide el pentágono en un cuadrado y el triángulo *BCD*. Es fácil ver que el ángulo α es 60°, de forma que el ángulo $\widehat{B} = \widehat{D} = 90° + 60° = 150°$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo *ABC*, se obtiene la longitud del segmento *AC*:

$$AC^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 150° = 59{,}713 \Rightarrow AC = 7{,}727 \text{ cm}$$

Una vez conocido *AC*, el ángulo *ACE* es:

$$ACE = 2 \cdot \beta \Rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{2}{7{,}727} = 0{,}259 \Rightarrow \beta = 15° \text{ y } ACE = 30°.$$

8.85 Los ángulos de una parcela triangular están en progresión aritmética de diferencia 40°. Calcula el perímetro y el área de la parcela si el lado menor mide 58 metros.

Sus ángulos serán $\alpha - 40°$, α y $\alpha + 40°$. Como tienen que sumar 180°, se tiene que:

$\alpha - 40° + \alpha + \alpha + 40° = 180° \Rightarrow 3\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$.

Los ángulos del triángulo serán 20°, 60° y 100°.

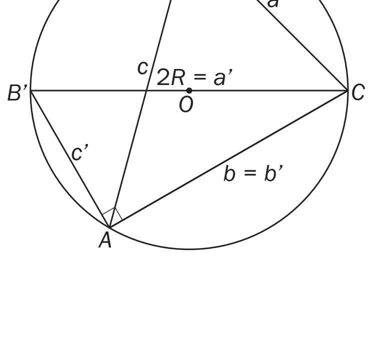
Por el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}\,20°}{58} = \frac{\text{sen}\,60°}{b} = \frac{\text{sen}\,100°}{c} \Rightarrow b = \frac{58 \cdot \text{sen}\,60°}{\text{sen}\,20°} = 146{,}861 \text{ m y } c = \frac{58 \cdot \text{sen}\,100°}{\text{sen}\,20°} = 167{,}004 \text{ m}$$

El perímetro de la parcela es $58 + 146{,}861 + 167{,}004 = 371{,}865$ m.

8.86 Demuestra que en el teorema del seno, la constante k: $k = \frac{\text{sen}\,\widehat{A}}{a} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{b} = \frac{\text{sen}\,\widehat{C}}{c}$ es igual a $2R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC*.

Sobre un triángulo *ABC* y su circunferencia circunscrita de radio R, como la que se puede ver en el dibujo, se traza el punto B', que es el punto diametralmente opuesto a C y el triangulo ACB'.



En el triángulo $AB'C$:

- El ángulo $\widehat{A}$ es recto ya que abarca un diámetro.
- El ángulo $\widehat{B}'$ coincide con el ángulo $\widehat{B}$, ya que abarca el mismo arco.

En los triángulos *ABC* y $AB'C$ se verifica el teorema del seno, por lo que:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} \text{ y } \frac{a'}{\text{sen}\,\widehat{A}'} = \frac{c'}{\text{sen}\,\widehat{C}'} = \frac{b'}{\text{sen}\,\widehat{B}'} \Rightarrow$$

$$\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{b'}{\text{sen}\,\widehat{B}'} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{a'}{\text{sen}\,\widehat{A}'} = \frac{2R}{1} = 2R$$

Por lo que $k = 2R$, como queríamos demostrar.

8.87 Las agujas del reloj

Las agujas del reloj de la estación de trenes miden 30 y 25 centímetros, respectivamente. Considera el triángulo que tiene los vértices en el centro del reloj y los extremos de las agujas.

a) Expresa el área del triángulo en función del ángulo α que forman las agujas.

b) Calcula el área del triángulo a las doce y cuarto.

c) ¿Cuál será el área del triángulo a las doce y media?

a) El área de un triángulo es: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$, donde la altura la calculamos por trigonometría: $h = 25 \cdot \operatorname{sen}\alpha$, por lo que el área es:

$A = \dfrac{30 \cdot 25 \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} = 375 \cdot \operatorname{sen}\alpha\ \text{cm}^2$.

b) A las doce y cuarto el ángulo entre las dos agujas es de $90° - 7°\,30' = 82°\,30'$, por lo que el área del triángulo va a ser: $A = 375 \cdot \operatorname{sen} 82{,}5° = 371{,}8\ \text{cm}^2$.

c) A las doce y media el ángulo que forman las dos agujas es de $180° - 15° = 165°$.

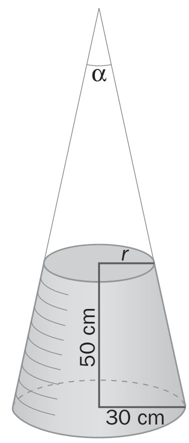
El área es $A = 375 \cdot \operatorname{sen} 165° = 97{,}06\ \text{cm}^2$.

8.88 Para medir la lluvia

Marina quiere medir la cantidad de agua que ha caído en las últimas lluvias.

Para ello ha utilizado el recipiente con forma de tronco de cono que muestra la figura, en la que el ángulo señalado mide:

$$\alpha = 22°\,38'$$



a) Calcula el valor del radio *r* de la circunferencia superior del recipiente.

b) Las marcas del recipiente están a la misma distancia unas de otras. ¿Se necesita la misma cantidad de lluvia para pasar de unas a otras?

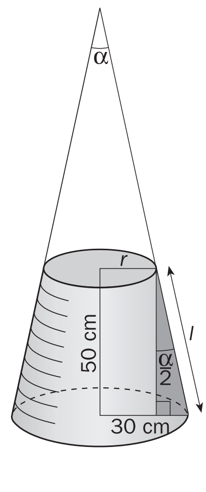
c) Calcula la distancia que separa dos marcas consecutivas del recipiente.

d) Calcula el volumen del recipiente.

e) Calcula la capacidad del recipiente en litros.

a) A partir del triángulo que se puede ver en la figura, el radio superior es:

$\operatorname{tg}\dfrac{22°\,38'}{2} = \dfrac{30 - r}{50} \Rightarrow r = 30 - 50 \cdot \operatorname{tg} 11°\,19' = 19{,}99$ cm.



b) No, cuanto más arriba se necesitará menor cantidad de líquido para pasar de una marca a otra, ya que el volumen de la sección del cono es cada vez menor al disminuir el radio.

c) El lado del cono *l*, mide $l = \sqrt{(30 - 19{,}99)^2 + 50^2} = 50{,}99$ cm. Como hay 10 marcas sobre el lado, la distancia entre marcas será de 5,1 cm.

d) El volumen se calcula restando al cono entero el cono pequeño superior.

El volumen del cono entero es: $V_c = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 30^2 \cdot \dfrac{30}{\operatorname{tg}(11°\,19')} = 141\,285{,}3\ \text{cm}^3$.

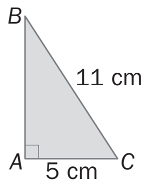
El volumen del cono superior es: $V_s = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 19{,}99^2 \cdot \dfrac{19{,}99}{\operatorname{tg}(11°\,19')} = 41\,799{,}6\ \text{cm}^3$

El volumen del tronco de cono es: $141\,285{,}3 - 41\,799{,}6 = 99\,485{,}7\ \text{cm}^3$.

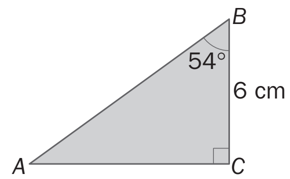
e) Un cm^3 equivale a un mL, es decir, a 0,001 litros, por lo que el volumen del recipiente es de 99,49 L.

8.A1 **Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.**

a)



b)



a) $c = \sqrt{11^2 - 6^2} = 9{,}22$ cm

$\cos \widehat{C} = \dfrac{6}{11} = 0{,}54 \Rightarrow \widehat{C} = 56°\ 56'\ 39''$

$\widehat{B} = 90° - 56°\ 56'\ 39'' = 33°\ 3'\ 21''$

b) $b = 6 \cdot \operatorname{tg} 54° = 8{,}26$ cm

$c = \dfrac{6}{\cos 54°} = 10{,}21$ cm

$\widehat{A} = 90° - 54° = 36°$

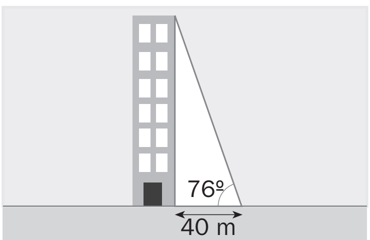
8.A2 **Javier sale de trabajar de un edificio de oficinas, se aleja 40 metros, se gira y observa el edificio con un ángulo de elevación de 76°.**

a) Representa gráficamente la situación.

b) Calcula la altura del edificio.

c) ¿Cuánto más debería alejarse Javier para observar el edificio con un ángulo de elevación de 50°?

a)



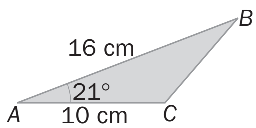
b) $h = 40 \cdot \operatorname{tg} 76° = 160{,}43$ m

c) La distancia entre Javier y el edificio deberá ser:

$d = \dfrac{x}{\operatorname{tg} 50°} = \dfrac{40 \cdot \operatorname{tg} 76°}{\operatorname{tg} 50°} = 134{,}62$ m, por lo que tendrá que alejarse

$134{,}62 - 40 = 94{,}62$ m más.

8.A3 **Señala los elementos conocidos del triángulo de la figura y calcula los elementos restantes.**

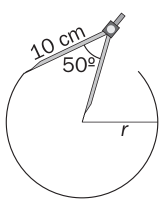


Por el teorema del coseno: $a^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cos 21° = 57{,}254 \Rightarrow a = 7{,}567$ cm

Por el teorema del seno: $\dfrac{\operatorname{sen} 21°}{7{,}567} = \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{B}}{10} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{B} = \dfrac{10 \cdot \operatorname{sen} 21°}{7{,}567} = 0{,}474 \Rightarrow \widehat{B} = 28°\ 16'\ 4''$

$\widehat{C} = 180° - 21° - 28°\ 16'\ 4'' = 130°\ 43'\ 56''$

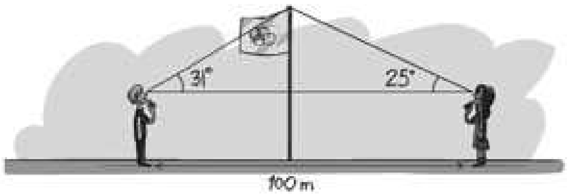
8.A4 **Las dos ramas de un compás tienen 10 centímetros de longitud. Calcula el radio de la circunferencia que se puede trazar cuando se abren formando un ángulo de 50°.**



$\operatorname{sen} 25° = \dfrac{\frac{r}{2}}{10}$

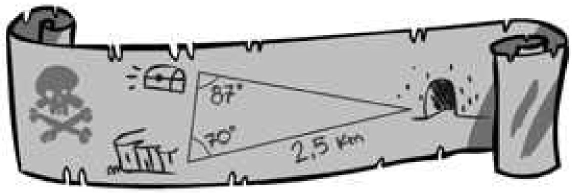
$r = 2 \cdot 10 \cdot \operatorname{sen} 25° = 8{,}45$ cm

8.A5 **Observa el dibujo y calcula la altura de la bandera si los niños miden 1,5 metros.**



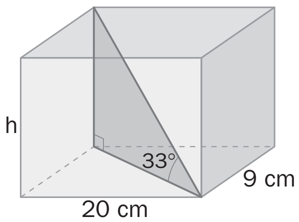
a) $h = 1{,}5 + h' \Rightarrow \left.\begin{matrix} h' = x\,\text{tg}\,31° \\ h' = (100 - x)\,\text{tg}\,25° \end{matrix}\right\}$ Se resuelve el sistema y se obtiene: $h' = 26{,}25$ m, por lo que $h = 27{,}75$ m.

8.A6 **Observa las distancias señaladas en el mapa y calcula la distancia que separa la cueva del tesoro.**



Se aplica el teorema del seno: $\dfrac{\text{sen}\,87°}{2{,}5} = \dfrac{\text{sen}\,70°}{d} \Rightarrow d = 2{,}35$ km.

8.A7 **Calcula el área y el volumen del ortoedro de la figura.**



Para calcular la altura del ortoedro, se necesita conocer la diagonal de la base:

$d = \sqrt{20^2 + 9^2} = 21{,}93$ cm.

La altura es: $h = 21{,}93 \cdot \text{tg}\,33° = 14{,}24$ cm.

El área será la suma de las áreas de las bases y las áreas laterales:

$A = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 9 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \cdot 14{,}24 + 2 \cdot 9 \cdot 14{,}24 = 1185{,}92\ \text{cm}^2$

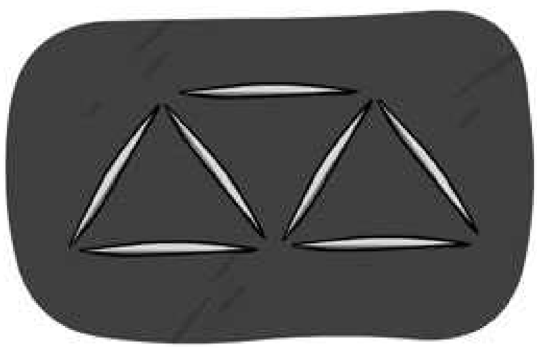
El volumen del ortoedro será: $V = A_{\text{base}} \cdot h = 20 \cdot 9 \cdot 14{,}24 = 2563{,}2\ \text{cm}^3$.

E N T R E T E N I D O

Construcciones con palillos

Observa esta construcción: está formada por 7 palillos iguales y en ella podemos ver 3 triángulos equiláteros.

¿Serías capaz de formar otra construcción en la que aparezcan 4 triángulos equiláteros y en la que emplees solamente 6 palillos iguales?



El bloqueo que surge a la hora de resolver este problema es que nos limitamos al plano. ¿Has probado a pasar al espacio? En el espacio la solución es inmediata: los 6 palillos corresponden a las 6 aristas de un tetraedro regular.