Tema 8. Rectas y Planos en el Espacio

1. Ecuaciones de una recta
2. Ecuaciones de un plano
3. Posiciones relativas
   - 3.1. Dos planos. Ecuaciones generales
   - 3.2. Un plano y una recta
     - 3.2.1. Ecuación general de ambos
     - 3.2.2. Ecuación vectorial de la recta y general del plano
     - 3.2.2. Ecuación vectorial de ambos
   - 3.3. Dos rectas
     - 3.3.1. Ecuación general de ambas
     - 3.3.2. Ecuación vectorial de ambas
   - 3.4. Tres planos
4. Problemas tipo
   - 4.1. Recta que pasa por un punto corta perpendicularmente a otra
   - 4.2. Recta que pasa por un punto y corta a otras dos
   - 4.3. Recta que corta perpendicularmente a otras dos

1. Ecuaciones de una recta

Para obtener una recta se necesita un **punto** de la recta *P* (y con él su **vector posición** : $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$) y un **vector** paralelo a la recta $\overline{v}$ (**vector director**).

- Ecuación vectorial: Punto genérico de la recta: X $\rightarrow r: \vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{v}$

  Geogebra

- Ecuaciones paramétricas

$$r:\begin{cases} x=p_1+\lambda v_1 \\ y=p_2+\lambda v_2 \\ z=p_3+\lambda v_3 \end{cases}$$

- Ecuación continua (realmente son tres). En las paramétricas se despeja λ y se iguala

$$r: \frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}=\frac{z-p_3}{v_3}$$

- Ecuación general (implícita). Se multiplica en cruz dos veces en la ecuación continua, se iguala a 0 y se forma un sistema de dos ecuaciones. (Hay que asegurarse que el sistema sea de rango 2). Se obtiene:

$$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

  Para pasar de la ecuación general a cualquiera de las otras se resuelve el sistema.

  Si a partir de la ecuación general solo buscamos el vector director: *ver Apartado 2.2.*

Ejemplo 1:

Obtener la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A(0,1,-1) y B(-3,2,-1)

$$r:\begin{cases} punto: & A \\ vector: & \vec{AB}=(-3,1,0) \end{cases}$$

Ecuación continua: $r: \frac{x}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{0}$

Ecuación general: $r:\begin{cases} x+3y-3=0 \\ -3z-3=0 \end{cases}$

Ejemplo 2:

Obtener tres puntos de la recta *r*. Uno de ellos debe ser el punto de corte con el plano *OXZ*

$$r:\begin{cases} x+3y-z-3=0 \\ -2x-3z-3=0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema. Estudiamos los rangos, “de cabeza” para ver qué incógnita despejamos. En este caso *z*.

$$r:\begin{cases} x=\frac{3+3\lambda}{-2} \\ y=\frac{9+5\lambda}{6} \\ z=\lambda \end{cases}$$

- Un punto lo tenemos en la ecuación.
- Para sacar otro punto damos un valor a *λ* (p.ej. *λ=1*).
- Para el tercero hay que hacer *y = 0*

Soluciones: *A(-3/2 , 3/2 , 0) , B(-3 , 7/3 , 1) , C(6/5 , 0 , -9/5)*

2. Ecuaciones de un plano

Hay dos posibilidades para obtener las ecuaciones:

- Caso 1: A partir de un punto del plano y dos vectores paralelos al plano y L.I. (no paralelos entre ellos) $\rightarrow \Pi : (P , \overline{u} , \overline{v})$ Geogebra
- Caso 2: A partir de un punto del plano y un vector normal (perpendicular) al plano $\rightarrow \Pi : (P , \overline{n})$ Geogebra

2.1. Caso 1 $\rightarrow \Pi : (P , \overline{u} , \overline{v})$

- Ecuación vectorial: Punto genérico del plano: X $\rightarrow \pi : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
- Ecuaciones paramétricas

$$\pi : \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

- Ecuación continua no hay
- Ecuación general (implícita): Los vectores $\{\overline{PX} , \overline{u} , \overline{v}\}$ son coplanarios, por tanto su rango es 2 y su determinante es 0

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Se desarrolla y se obtiene: $Ax + By + Cz + D = 0$

2.2. Caso 2 → $\Pi : (P , \overline{n})$

Tenemos un punto *P* del plano y un vector $\overline{n}$ normal al plano. Si X es un punto genérico del plano, los vectores $\overline{PX}$ y $\overline{n}$ son perpendiculares, o sea, $\overline{PX} \cdot \overline{n} = 0$

$$(x-p_1)\cdot n_1+(y-p_2)\cdot n_2+(z-p_3)\cdot n_3=0$$

Se desarrolla esto y se obtiene una ecuación general $\quad Ax+By+Cz+D=0$

Se puede observar que A = n_1 ; B = n_2 ; C = n_3. O sea, que si se mira al revés, cuando tenemos una ecuación general de un plano, el vector **$\overline{n}$ = *(A, B, C)* es un vector normal al plano.**

Para pasar de la general a alguna de las anteriores se resuelve la ecuación general: p. ej.: $z = \lambda$, $y = \mu$, x se despeja

Ejemplo. Hallar las ecuaciones del plano que pasa por los puntos *A(0,1,0)* , *B(3,3,3)* , *C(2,–2,4)*

$$\pi : \begin{cases} punto: \quad A \\ vector: \quad \overrightarrow{AB}=(3,2,3) \quad \overrightarrow{AC}=(2,-3,4) \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas $\pi : \begin{cases} x=3\lambda+2\mu \\ y=1+2\lambda-3\mu \\ z=3\lambda+4\mu \end{cases}$

Ecuación general: $\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 17x-6y-13z+6=0$

El vector $\overline{n}$ = *(17 , –6 , –13)* es perpendicular al plano. *Esto es muy útil para muchos ejercicios*

2.2.1. Obtención del vector director de una recta a partir de la ecuación general

La ecuación general de una recta es el sistema formado por dos planos *(el sistema debe ser r(A) = r($\overline{A}$) = 2)*:

$$r:\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{matrix}$$

Los vectores $\overline{n_1}$ y $\overline{n_2}$ son perpendiculares a cada plano. Como la recta está contenida en los dos planos, estos dos vectores son perpendiculares a la recta. Por tanto, su producto vectorial es un vector director de la recta:

Vector director de r: $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ Geogebra

Ejemplo: Hallar la ecuación de una recta que pase por el punto *P(0,-3,2)* y sea paralela a la recta

$$r:\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ -x - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Tenemos el punto. Necesitamos el vector director. Como la recta buscada es paralela a *r*, nos vale su mismo vector director. Para obtener su vector director, en vez de resolver el sistema de *r*, es mejor el método del producto vectorial

$$\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$$
$$\vec{n}_2 = (-1, 0, -1) \qquad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,2,1) \qquad s: \vec{x} = (0,-3,2) + \lambda(-1,2,1)$$

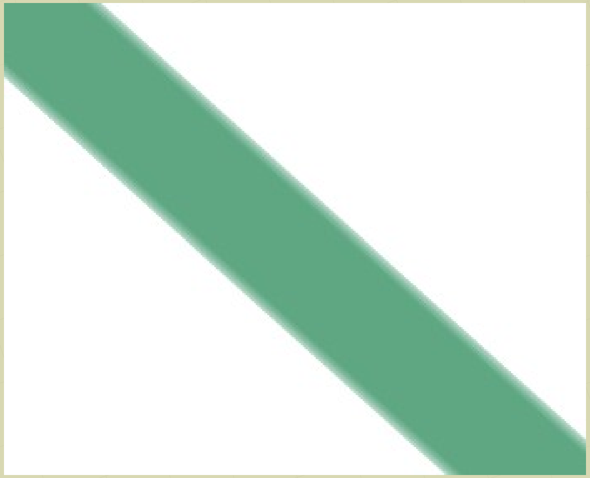
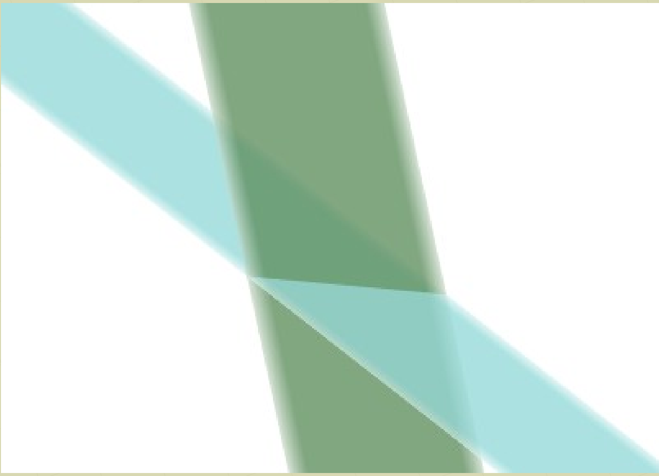
3. Posiciones relativas

3.1. Dos planos

$$\begin{cases} \Pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \Pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Hay que estudiar las soluciones del sistema:

- $r(A) = 1$; $r(\overline{A}) = 2$; $n = 3$. Sistema incompatible: Paralelos disjuntos
- $r(A) = 1$; $r(\overline{A}) = 1$; $n = 3$. Sistema compatible indeterminado: Paralelos coincidentes
- $r(A) = 2$; $r(\overline{A}) = 2$; $n = 3$. Sistema compatible indeterminado: no paralelos, se cortan en una recta Geogebra

3.2. Una recta y un plano

3.2.1. Ecuaciones generales de la recta y del plano

$$r:\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Pi: A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$$

Estudiamos las soluciones del sistema:

- r(A) = 3 ; r($\overline{A}$) = 3 ; n = 3 . Sistema compatible determinado: se cortan en un punto
- r(A) = 2 ; r($\overline{A}$) = 3 ; n = 3 . Sistema incompatible: Paralelos disjuntos
- r(A) = 2 ; r($\overline{A}$) = 2 ; n = 3 . Sistema compatible indeterminado: Paralelos, la recta está contenida en el plano

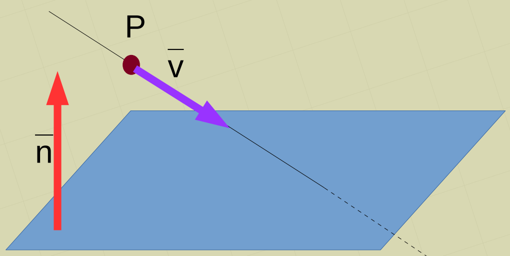
3.2.2. Ecuación vectorial de la recta y general del plano

$$r:\vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{v}$$

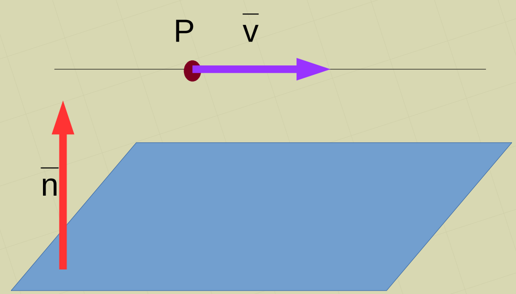
$$\Pi: A x+B y+C z+D=0 \quad ; \quad \vec{n}=(A,B,C)$$

Estudiamos si los vectores $\overline{v}$ y $\overline{n}$ son perpendiculares

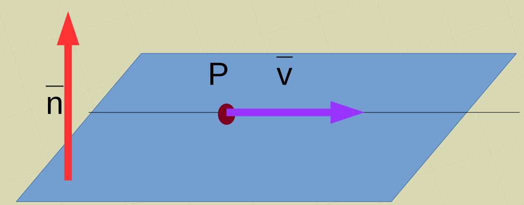
- Si $\overline{v}\angle\overline{n} \rightarrow \overline{v}\cdot\overline{n}\neq 0$: se cortan en un punto
- Si $\overline{v}\perp\overline{n} \rightarrow \overline{v}\cdot\overline{n}=0$: paralelos
  - Si $P\notin\Pi$: paralelos disjuntos
  - Si $P\in\Pi$: la recta está contenida en el plano



$\vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0$



$\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \;,\; P\notin\pi$



$\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \;,\; P\in\pi$

3.2.3. Ecuaciones vectoriales para la recta y el plano

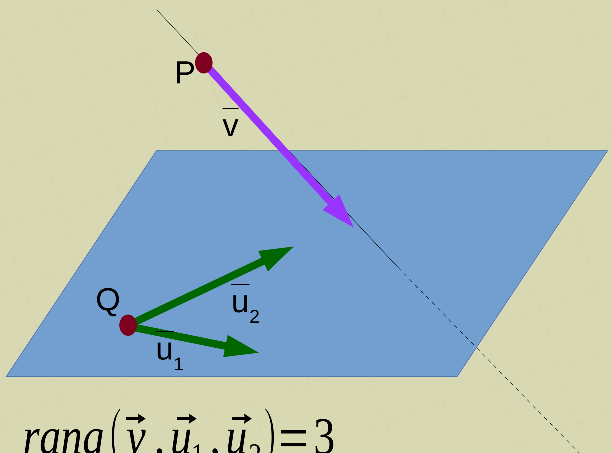
$$r: \vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{v}$$

$$\pi: \vec{x}=\vec{q}+\mu_1\vec{u}_1+\mu_2\vec{u}_2$$

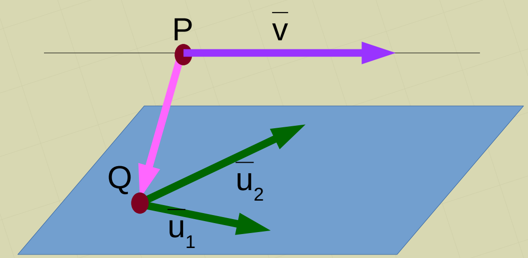
Estudiamos el rango de los vectores $\overline{v}$, $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{PQ}$ *(debemos tener en cuenta que r($\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$) = 2)*

- Si r($\overline{v}$, $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$) = 3 : se cortan en un punto
- Si r($\overline{v}$, $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$) = 2 : paralelos
  - Si r($\overline{v}$, $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{PQ}$) = 3 : paralelos disjuntos
  - Si r($\overline{v}$, $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{PQ}$) = 2 : paralelos, la recta está contenida en el plano

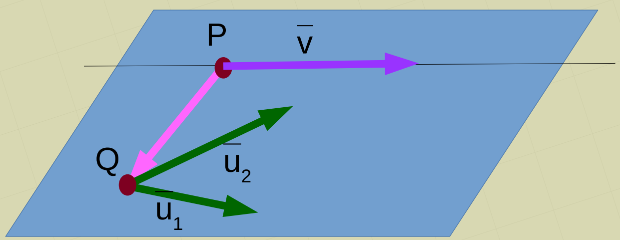
Geogebra



$$rang(\vec{v},\vec{u}_1,\vec{u}_2)=3$$



$$rang(\vec{v},\vec{u}_1,\vec{u}_2)=2$$
$$rang(\vec{v},\vec{u}_1,\vec{u}_2,\overrightarrow{PQ})=3$$



$$rang(\vec{v},\vec{u}_1,\vec{u}_2)=2$$
$$rang(\vec{v},\vec{u}_1,\vec{u}_2,\overrightarrow{PQ})=2$$

Ejemplo. Estudiar la posición relativa entre la recta r, que pasa por el origen y el punto P(2,3,4), con el plano π, que pasa los puntos A(1,1,1), B(2,0,2), C(2,5,4)

$$r:\begin{cases} punto: & P \\ vector: & \overrightarrow{OP}=(2,3,4) \end{cases}$$

$$\pi:\begin{cases} punto: & A \\ vector: & \overrightarrow{AB}=(1,-1,1) \quad \overrightarrow{AC}=(1,4,3) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP}=(1,2,3)$$

Matriz de los vectores directores:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; |A|=0 \;\rightarrow\; r(A)=2$$

Recta y plano paralelos

Ampliamos con el vector $\overline{AP}$:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; r(\bar{A})=3$$

Recta y plano paralelos disjuntos

3.3. Dos rectas

3.3.1. Ecuación general de las dos rectas

$$r_1:\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad r_2:\begin{cases} A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0 \end{cases}$$

Estudiamos las soluciones del sistema de cuatro ecuaciones:

- Si r(A) = 3 No paralelas
  - r(A) = 3 ; r($\overline{A}$) = 4 . Sistema incompatible: se cruzan
  - r(A) = 3 ; r($\overline{A}$) = 3 ; n = 3 . Sistema comp. det.: secantes en un punto
- Si r(A) = 2 Paralelas
  - r(A) = 2 ; r($\overline{A}$) = 3 . Sistema incompatible: Paralelas disjuntas
  - r(A) = 2 ; r($\overline{A}$) = 2 ; n = 3 . Sistema comp. indet.: Parelelas coincidentes

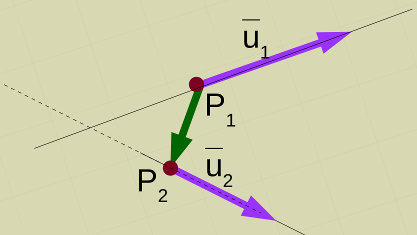
3.3.2. Ecuación vectorial de las dos rectas

$$r_1 : \vec{x} = \vec{p}_1 + \lambda \vec{u}_1 \quad ; \quad r_2 : \vec{x} = \vec{p}_2 + \lambda \vec{u}_2$$

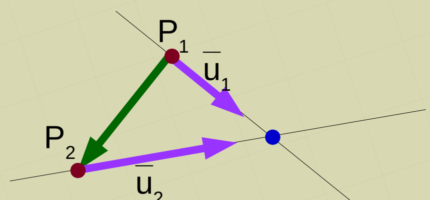
Estudiamos el rango de los vectores $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{P_1P_2}$

- Si r($\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$) = 2 . Secantes o cruzadas
  - Si r($\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{P_1P_2}$) = 3 Se cruzan
  - Si r($\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{P_1P_2}$) = 2 Secantes en un punto
- Si r($\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$) = 1 . Paralelas
  - Si r($\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{P_1P_2}$) = 2 Paralelas disjuntas
  - Si r($\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{P_1P_2}$) = 1 Paralelas coincidentes

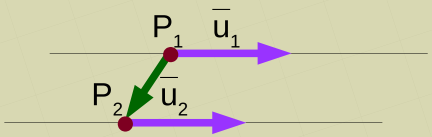
Geogebra



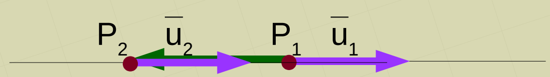
$rang(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2$
$rang(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 3$



$rang(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2$
$rang(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2$



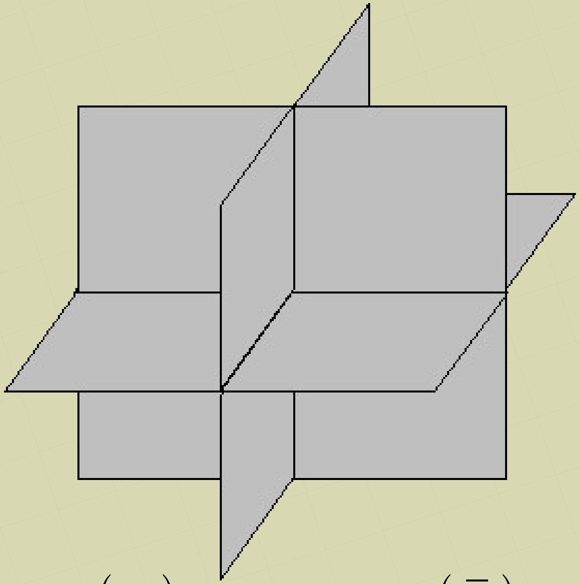
$rang(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 1$
$rang(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2$



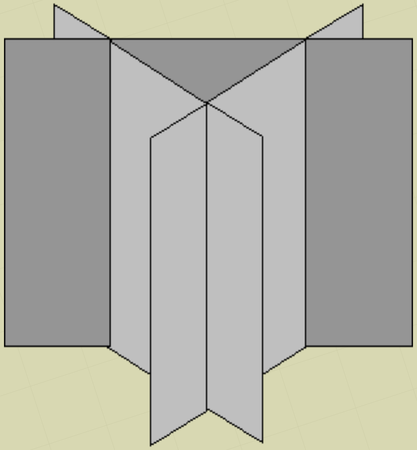
$rang(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 1$
$rang(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 1$

3.4. Tres planos

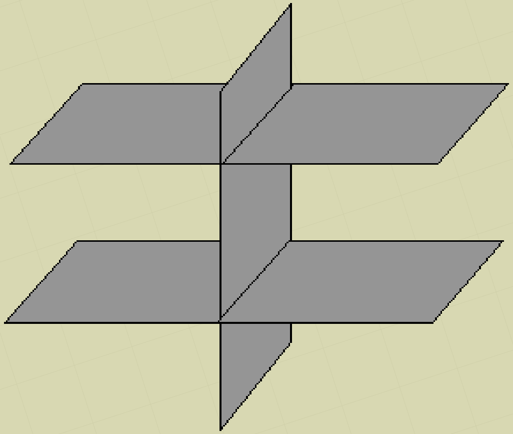
Se estudian los rangos del sistema de tres ecuaciones. En los casos dudosos hay que hacerlo después por parejas.



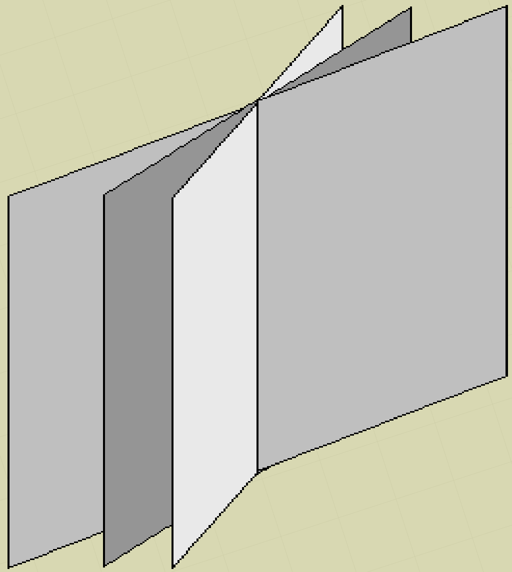
$$rang(A)=3 \quad ; \quad rang(\bar{A})=3$$



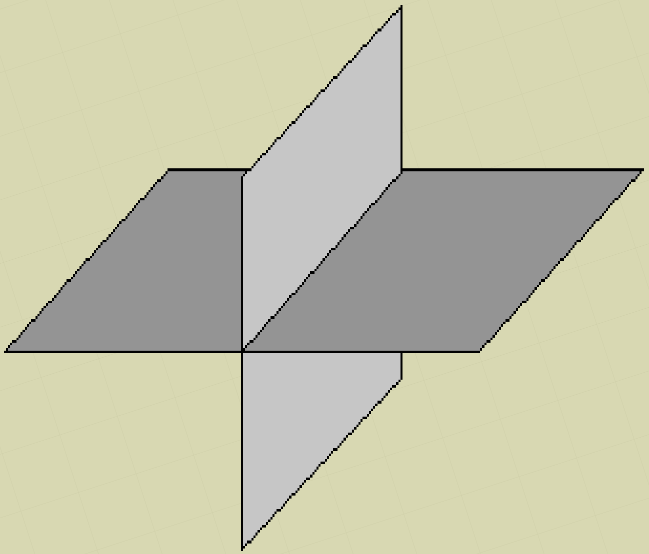
$$rang(A)=2 \quad ; \quad rang(\bar{A})=3$$



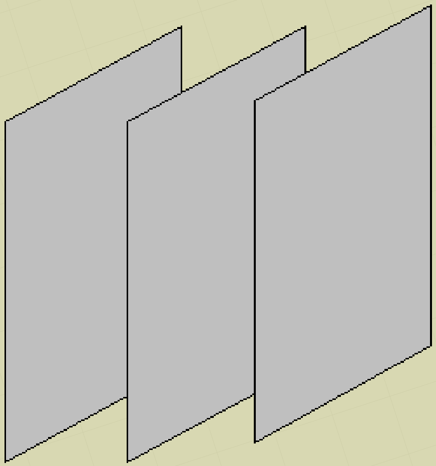
$$rang(A)=2 \quad ; \quad rang(\bar{A})=3$$



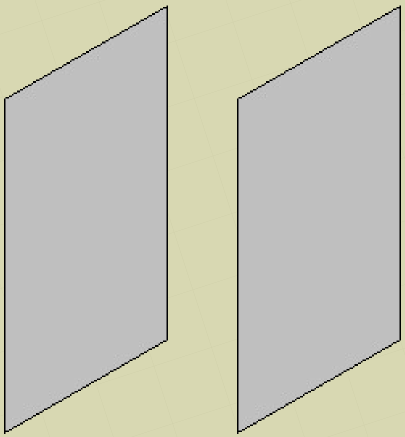
$rang(A)=2 \;\; ; \;\; rang(\bar{A})=2$



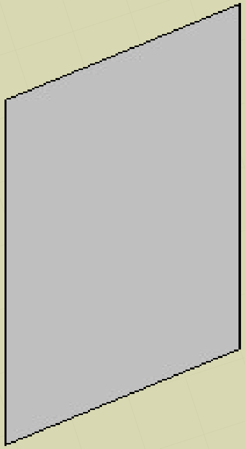
$rang(A)=2 \;\; ; \;\; rang(\bar{A})=2$



$rang(A)=1 \;\; ; \;\; rang(\bar{A})=2$



$rang(A)=1 \;\; ; \;\; rang(\bar{A})=2$



$rang(A)=1 \;\; ; \;\; rang(\bar{A})=1$

4. Problemas tipo

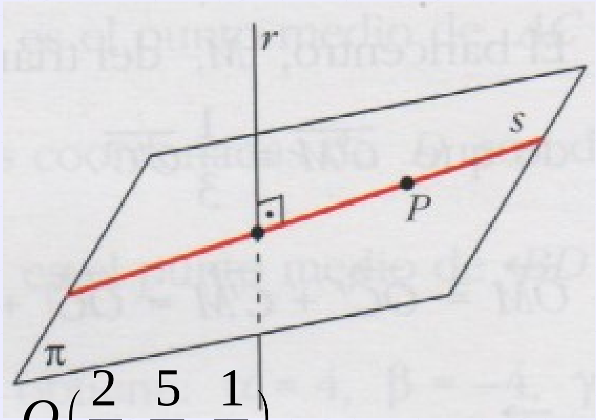
4.1.1. Recta que pasa por un punto corta perpendicularmente a otra

Calcular una recta *s* que pase por el punto *P* y que corte perpendicularmente a la recta r. $P(0,1,-1)$ $r:(1,1,0)+\lambda(2,1,-1)$

- Hacemos un plano perpendicular a *r* que pase por *P.*
  - Como el plano es perpendicular a *r*, su vector normal es $\vec{n}=(2,1,-1)$
  - La ecuación general del plano es $\pi:2x+y-z+D=0$
    - Como queremos que el plano contenga a *P*, podemos sustituir

$$P\in\pi \rightarrow 2\cdot 0+1+1+D=0 \rightarrow D=-2$$

$$\pi:2x+y-z-2=0$$



- Hallamos el punto de corte de *r* y *π* : *Q*
  - Punto genérico de *r* $Q(1+2\lambda,1+\lambda,-\lambda)$
  - Se sustituye *Q* en *π* y se obtiene el punto de corte

$$2(1+2\lambda)+(1+\lambda)-(-\lambda)-2=0 \rightarrow \lambda=\frac{-1}{6} \rightarrow Q\left(\frac{2}{3},\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)$$

- La recta pedida, *s* , es la que une *P* y *Q*

$$s:\begin{cases} punto: & P \\ vector: & \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right) \end{cases} \qquad s:(0,1,-1)+\lambda\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$$

Este ejercicio, en el tema siguiente, puede usarse para calcular la distancia de un punto a una recta

Geogebra

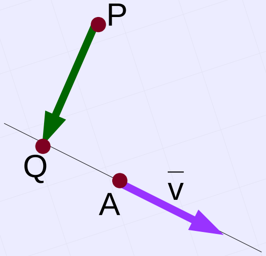
4.1.2. Recta que pasa por un punto corta perpendicularmente a otra

El mismo problema de antes puede hacerse de otra forma:

Calcular una recta *s* que pase por el punto *P* y que corte perpendicularmente a la recta r. $P(0,1,-1)$ $r:(1,1,0)+\lambda(2,1,-1)$

- Punto genérico de r: $Q(1+2\lambda, 1+\lambda, -\lambda)$
- El vector $\overline{PQ}$ debe ser perpendicular a *r*:

$$(2,1,-1)\cdot(1+2\lambda, \lambda, -\lambda+1)=0 \quad ; \quad \lambda=\frac{-1}{6} \quad ; \quad Q\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$$



- La recta pedida, *s* , es la que une *P* y *Q*

$$s:\begin{cases} punto: & P \\ vector: & \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right) \end{cases}$$

$$s:(0,1,-1)+\lambda\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$$

4.2.1 Recta que pasa por un punto y corta a otras dos

Calcular una recta *s* que pase por el punto *P* y que corte a las rectas r_1 y r_2 .

$$P(-2,0,-4) \quad r_1:(1,1,0)+\lambda(2,1,-1) \qquad r_2:(0,1,-1)+\mu(0,1,-1)$$

- Primero hay que ver la posición relativa entre las rectas. Claramente no son paralelas.

  Hacemos el determinante de orden tres para ver si son secantes o cruzadas

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{Q_1Q_2})=3 \quad \textit{rectas cruzadas}$$

- Hacemos un plano π_1 que contiene a *P* y a r_1

$$\pi_1:\begin{cases} punto: & P \\ vector: & \vec{u}_1=(2,1,-1) \quad \overrightarrow{PQ}_1=(3,1,4) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z+4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \pi_1:-5x+11y+z-6=0$$

- Hacemos un plano π_2 que contiene a *P* y a r_2

$$\pi_2:\begin{cases} punto: & P \\ vector: & \vec{u}_2=(0,1,-1) \quad \overrightarrow{PQ}_2=(2,1,3) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z+4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \pi_2:-2x+y+z=0$$

- La recta pedida *s* es la intersección de los dos planos $\quad s:\begin{cases} -5x+11y+z-6=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$

Geogebra

4.2.2 Recta que pasa por un punto y corta a otras dos

El mismo problema de antes puede hacerse de otra forma:

Calcular una recta *s* que pase por el punto *P* y que corte a las rectas r_1 y r_2 .

$$P(-2,0,-4) \quad r_1:(1,1,0)+\lambda(2,1,-1) \quad r_2:(0,1,-1)+\mu(0,1,-1)$$

$$r_1:\begin{cases} punto: & Q_1(1,1,0) \\ vector: & \vec{u}_1=(2,1,-1)\end{cases} \qquad r_2:\begin{cases} punto: & Q_2(0,1,-1) \\ vector: & \vec{u}_2=(0,1,-1)\end{cases}$$

- Vector director de la recta pedida: $\vec{v}=(a,b,c)$
- Los vectores $\overline{v}$, $\overline{u}_1$ y $\overline{PQ_1}$ deben ser coplanarios
- Los vectores $\overline{v}$, $\overline{u}_2$ y $\overline{PQ_2}$ deben ser coplanarios

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{cases} 5a-11b-c=0 \\ 4a-2b-2c=0 \end{cases}$$

- Se resuelve el sistema (comp. indet.) y se saca una solución: $\vec{v}=(10,3,17)$
- La recta pedida *s* va a ser

$$s:\begin{cases} punto: & P \\ vector: & \vec{v}\end{cases}$$

4.3. Recta que corta perpendicularmente a otras dos

Calcular una recta *s* que corte perpendicularmente a las rectas r_1 y r_2 .

$r_1:(1,1,0)+\lambda(2,1,-1) \qquad r_2:(0,1,-1)+\mu(0,1,-1)$

- Primero hay que ver la posición relativa entre las rectas. Son cruzadas (problema anterior)
- Punto genérico de r_1 y r_2 : $Q_1(1+2\lambda,1+\lambda,-\lambda)$; $Q_2(0,1+\mu,-1-\mu)$
- La recta pedida *s* va a ser $s:\begin{cases} punto: & Q_1(o\ Q_2) \\ vector: & \overrightarrow{Q_1Q_2}=(-1-2\lambda,\mu-\lambda,-1-\mu+\lambda) \end{cases}$
  - El vector $\overline{Q_1Q_2}$ debe ser perpendicular a r_1 y a r_2 :

$$\begin{cases} (2,1,-1)\cdot(-1-2\lambda,\mu-\lambda,-1-\mu+\lambda)=0 \\ (0,1,-1)\cdot(-1-2\lambda,\mu-\lambda,-1-\mu+\lambda)=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda=\frac{-1}{2} \\ \mu=-1 \end{cases}$$

- La recta pedida *s* es: $s:\begin{cases} punto: & Q_1(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ vector: & \overrightarrow{Q_1Q_2}=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \end{cases}$

Este ejercicio, en el tema siguiente, puede usarse para calcular la distancia entre dos rectas cruzadas

Ejercicios. (2008)

1. Dada la recta r definida por: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$

   a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.
   b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

2. Dados los puntos $A(2,1,1)$ y $B(0,0,1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

3. Los puntos $A=(-2,3,1)$, $B=(2,-1,3)$ y $C=(0,1,-2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

   a) Halla las coordenadas del vértice D.
   b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.
   c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

4. Sea la recta r dada por $\begin{cases} 2x+y-mz=2 \\ x-y-z=-m \end{cases}$ y el plano π definido por $x+my-z=1$

   a) ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?.
   b) ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?.
   c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m=0$?.

5. Considera la recta r definida por $\begin{cases} x=0 \\ 3y+z=3 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} 2x-z=3 \\ y=0 \end{cases}$

   a) Estudia la posición relativa de r y s.
   b) Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r.

6. Sea la recta r definida por $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ y sean los planos π_1 de ecuación $x+y+z=0$, y π_2, de ecuación $y+z=0$. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano π_1, que es paralela al plano π_2 y que corta a la recta r.

Ejercicios. (2008)

7. Se sabe que los planos de ecuaciones: $x+2y+bz=1$; $2x+y+bz=0$; $3x+3y-2z=1$ se cortan en una recta r.
a) Calcula el valor de b.
b) Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

8. Dados los puntos $A=(2,1,-1)$ y $B=(-2,3,1)$ y la recta r definida por $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$ halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

9. Se considera la recta r definida por $mx=y=z+2$ $(m\neq 0)$, y la recta s definida por $\dfrac{x-4}{4}=y-1=\dfrac{z}{2}$
a) Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.
b) Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.

10. Considera los puntos $A=(2,0,1)$, $B=(-1,1,2)$, $C=(2,2,1)$ y $D=(3,1,0)$.
a) Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B,C y D.
b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

11. Sea la recta s dada por $\begin{cases} x-z=-1 \\ 2y+z=3 \end{cases}$
a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y que contiene a la recta r, dada por $x-1=-y+2=z-3$
b) Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2, de ecuación $x+y=3$, y deduce la distancia entre ambos.

12. Dados los puntos $A=(1,1,0)$, $B=(1,1,2)$ y $C=(1,-1,1)$.
a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.
b) Halla la ecuación del plano que contiene el punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C.