Tema 7. Vectores en el Espacio

1. Definiciones
    1.1. Rango de vectores
    1.2. Bases
2. Producto escalar
3. Producto vectorial
    Área de un paralelogramo y de un triángulo
4. Producto mixto

Volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro

1. Definiciones

- Coordenadas, puntos y vectores. Vectores iguales. *Geogebra*
- Combinación lineal.

Una combinación lineal entre varios vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_{2,} \vec{v}_3, \ldots$ es cualquier operación del tipo: $a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 + \ldots$

- Vectores linealmente dependientes

Uno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás

- Vectores linealmente independientes

No es posible poner uno de ellos como combinación lineal de los demás

Ejemplos.

$$\vec{u}_1=(1,-2,2)\ ,\ \vec{u}_2=(0,3,1)\ ,\ \vec{u}_3=(2,-4,4)\ ,\ \vec{u}_4=(-1,5,-1)\ ,\ \vec{u}_5=(-1,0,1)$$

- $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ son linealmente independientes

Comprobación:

$$\vec{u}_1=a\cdot\vec{u}_2 \ \rightarrow\ (1,-2,2)=a\cdot(0,3,1) \ \rightarrow\ \begin{cases} 1=0 \\ -2=3a \\ 2=a \end{cases} \ \rightarrow\ Imposible$$

- $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_3$ son linealmente dependientes

Comprobación: $\vec{u}_3=2\cdot\vec{u}_1$

- $\overline{u}_1$, $\overline{\mathrm{u}}_2$ y $\overline{u}_4$ son linealmente dependientes

Comprobación: $\vec{u}_4=-\vec{u}_1+\vec{u}_2$

- $\overline{u}_1$, $\overline{\mathrm{u}}_2$ y $\overline{u}_5$ son linealmente independientes

Comprobación: $\vec{u}_5=a\cdot\vec{u}_1+b\cdot\vec{u}_2$ $\begin{cases} -1=a \\ 0=-2a+3b \\ 1=2a+b \end{cases} \ \rightarrow\ Imposible$

1.1. Rangos, dependencia lineal y geometría

- Dos vectores: v_1 y v_2
  - $r(v_1,v_2)=1 \rightleftarrows$ Lin. dep. $\rightleftarrows$ colineales (alineados, misma dirección)
  - $r(v_1,v_2)=2 \rightleftarrows$ Lin. ind. $\rightleftarrows$ coplanarios (distinta dirección , mismo plano)
- Tres vectores: v_1 , v_2 , v_3
  - $r(v_1,v_2,v_3)=1 \rightleftarrows$ Lin. dep. $\rightleftarrows$ colineales (alineados, misma dirección)
  - $r(v_1,v_2,v_3)=2 \rightleftarrows$ Lin. dep. $\rightleftarrows$ coplanarios (mismo plano)
  - $r(v_1,v_2,v_3)=3 \rightleftarrows$ Lin. ind. $\rightleftarrows$ no coplanarios (distintos planos) *Geogebra*
- Cuatro vectores:
  - rango <4 $\rightleftarrows$ Lin. dep.
  - rango =4 : Imposible, solo tenemos tres coordenadas, matriz 4x3

1.2. Bases

Tres vectores linealmente **independientes** son una **base** (su **rango es 3** , no son colineales ni coplanarios)

- Cualquier otro vector puede ponerse como combinación lineal de la base
- La **única** forma de conseguir el vector $\overline{0}$ es multiplicando la base por 0
- **Base ortogonal**: Los tres vectores de la base son **perpendiculares** entre sí
- **Base ortonormal**: la base es **ortogonal** y los tres vectores de la base son **unitarios** (módulo 1)

Ejemplo: Estudia la dependencia lineal de los vectores:

$$\vec{x}=(4,-6,8) \quad , \quad \vec{y}=(1,m,0) \quad , \quad \vec{z}=(3,-2,4)$$

Cuando sean L.D., busca una combinación lineal de los dos últimos para obtener el primero

Estudiamos el rango de la matriz que forman los tres vectores

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 1 & m & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Si m ≠ 1 → r(A) = 3 → L. Ind. → Base
- Si m = 1 → r(A) = 2 → L. Dep. → Coplanarios

Combinación lineal $\vec{x}=a\,\vec{y}+b\,\vec{z}$ ➔ $\begin{cases} 4=a+3b \\ -6=am-2b \\ 8=4b \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} b=2 \\ a=-2 \end{cases}$ $\quad \vec{x}=-2\,\vec{y}+2\,\vec{z}$

2. Producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}=k$

vectores

número

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}$$

- Perpendicularidad:
  - Si dos vectores no son $\overline{0}$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$
  - Conseguir vectores perpendiculares: $\vec{a}=(x,y,z)\rightarrow\begin{cases}\vec{b}=(-y,x,0)\rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\\ \vec{c}=(-z,0,x)\rightarrow\vec{a}\perp\vec{c}\end{cases}$
- Módulo de un vector : $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$
- Ángulo entre dos vectores : $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

2.1. Propiedades

- Conmutativa $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- Asociativa $k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\cdot\vec{v})$ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})\neq(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$
- Distributiva $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Ejercicio: Dados los vectores $\vec{u}=(1,-2,2)$, $\vec{v}=(-2,3,5)$, $\vec{w}=(3,0,m)$

a) Calcula *m* para que $\overline{u}$ y $\overline{w}$ sean perpendiculares

b) Calcula en ángulo entre $\overline{u}$ y $\overline{v}$

c) Obtén tres vectores perpendiculares a $\overline{v}$ que no sean paralelos entre ellos

d) Halla un vector que sea perpendicular $\overline{u}$ y $\overline{v}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \;\; ; \;\; 3-0+2m=0 \;\; ; \;\; m=\frac{-3}{2}$

b) $\alpha=\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{38}} \;\; ; \;\; \alpha=84^{o}$

c) $\vec{a}=(3,2,0) \;\; ; \;\; \vec{b}=(5,0,2) \;\; ; \;\; \vec{c}=(0,-5,3)$

d) $\begin{cases}(1,-2,2)\cdot(x,y,z)=0\\(-2,3,5)\cdot(x,y,z)=0\end{cases} \;\; ; \;\; \begin{cases}x-2y+2z=0\\-2x+3y+5z=0\end{cases} \;\; ; \;\; S.C.I \;\; ; \;\; \begin{cases}x=16\lambda\\y=9\lambda\\z=\lambda\end{cases} \;\; ;$

$(\lambda=1) \;\; ; \;\; \vec{s}=(16,9,1)$

(Este último apartado se hace mejor con el producto vectorial)

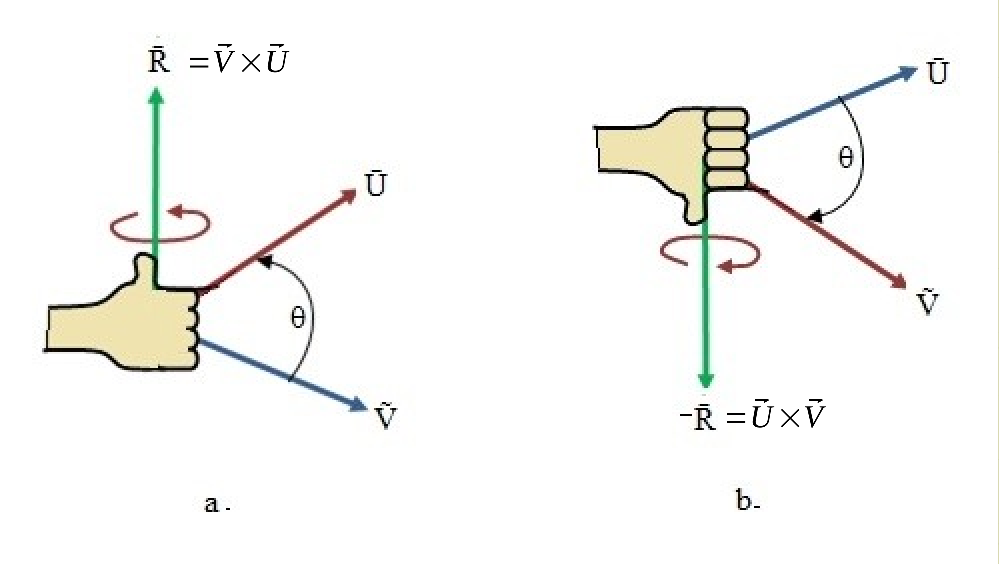
3. Producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}$

vectores

vector

El resultado es otro vector con las características:

- Módulo: $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- Dirección: perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{v}$ $\quad \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}\ ;\ \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$
- Sentido: Regla de la mano derecha



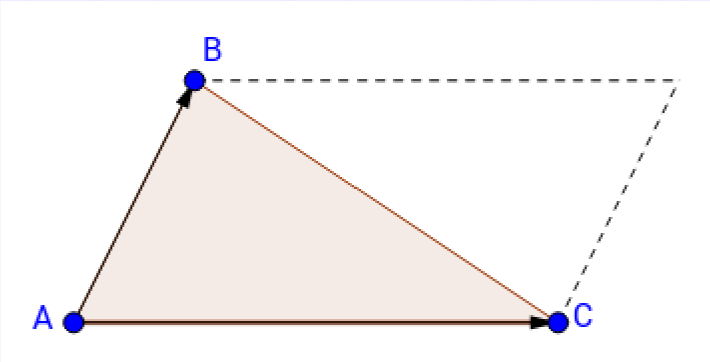
- Coordenadas: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

3.1. Propiedades

- Conmutativa: no se cumple $\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{v}\times\vec{u}$ $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
- Asociativas: $k\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=(k\cdot\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(k\cdot\vec{v})$
  $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\neq\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$
- Distributiva $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
- $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$
- Área del paralelogramo: $A=|\vec{u}\times\vec{v}|$

Ejemplo: Calcular el área del triángulo formado por los puntos *A(1,1,1)* , *B(2,0,2)* , *C(0,5,-5)*

Vectores: $\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,4,-6)$



$$A=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\frac{\sqrt{38}}{2}u^2$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 \end{vmatrix}=(2,5,3)$$

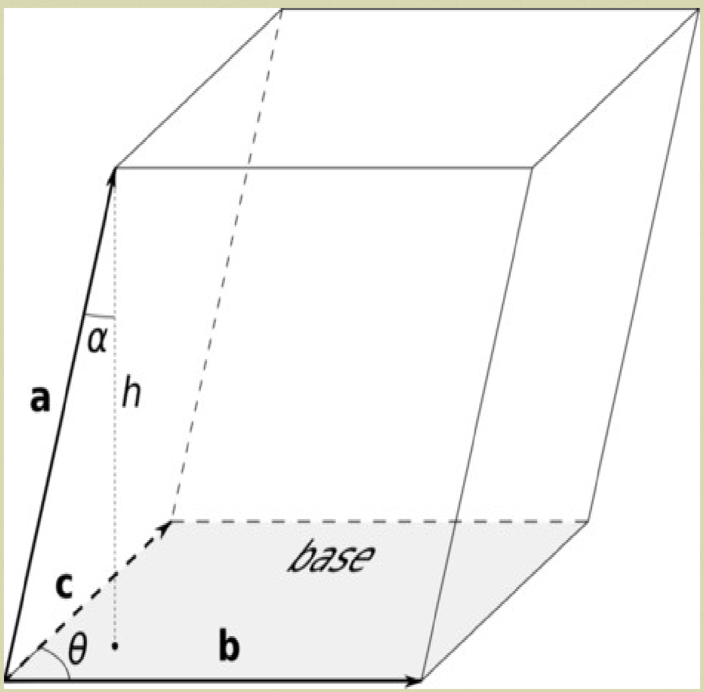
4. Producto mixto

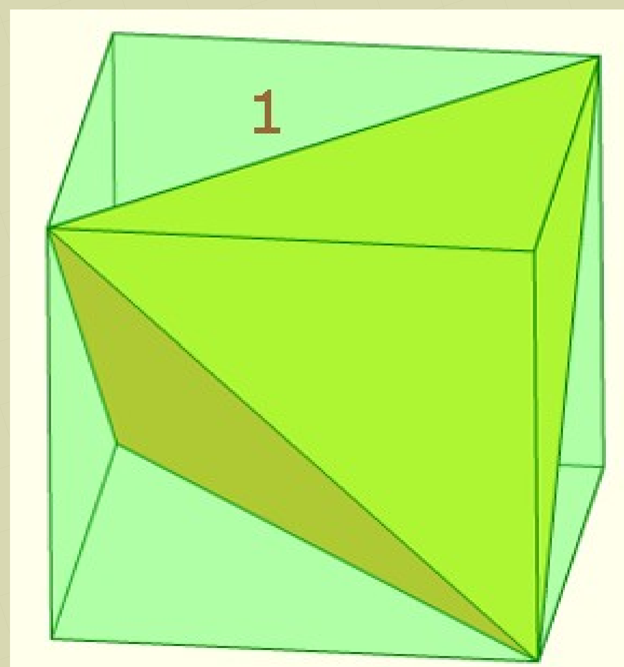
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=k$$

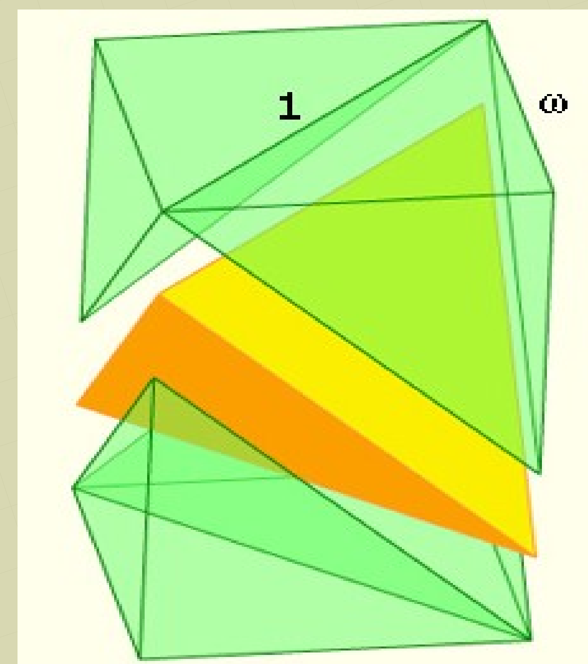
vectores — vector — vector — número

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- Volumen del paralelepípedo definido por 3 vectores: $V=\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|$
- Volumen del tetraedro definido por 3 vectores: $V=\frac{1}{6}\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|$







https://youtu.be/iC47ViAeHeg

Ejemplo. Halla el volumen del tetraedro formado por los puntos *A(1, 2, 3)*, *B(-1, 2, 3)*, *C(1, -2, 3)* y *D(1, 2, -3)* Geogebra

Vectores: $\overrightarrow{AB}=(-1,0,0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-4,0)$, $\overrightarrow{AD}=(0,0,-6)$

$$V=\frac{\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right\|}{6}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{vmatrix}\right\|}{6}=4u^3$$

Ejercicios

1.

2. Considera los puntos $A(-1,k,3), B(k+1,0,2), C(1,2,0)$ y $D(2,0,1)$.

a) ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\vec{AB}, \vec{BC}$ y $\vec{CD}$ sean linealmente dependientes?.

b) Calcula los valores de k para los que los puntos A, B, C y D forman un tetraedro de volumen 1.

3. El punto $M(1,-1,0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2,1,-1)$ y $B(0,-2,3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

4. Se consideran los vectores $\vec{u}=(k,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,-2)$ y $\vec{w}=(1,1,k)$, donde k es un número real.

a) Determina los valores de k para los que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Determina los valores de k para los que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{v}-\vec{w}$ son ortogonales.

c) Para $k=-1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y tienen módulo 1.

5. Sean los puntos $A(0,0,1), B(1,0,-1), C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$.

a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

c) Calcula la distancia del punto D al plano π.

6.

Ejercicios

7. Considera los puntos $A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.

a) Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo.

b) Calcula el área de dicho rectángulo.

8. Sean los vectores $\vec{u}=(1,-1,3)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ y $\vec{w}=(\lambda,1,0)$.

a) Calcula los valores de λ que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean ortogonales.

b) Calcula los valores de λ que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

c) Para $\lambda=1$ escribe el vector $\vec{r}=(3,0,2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

9. Sean los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(0,1,2)$ y $\vec{w}=(1+\alpha,2\alpha,2-3\alpha)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están en el mismo plano.

b) $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{1}{6}$

10. Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$

a) Calcula m para que A, B, C y D estén en un mismo plano.

b) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

c) Calcula el área del triángulo A,B y C.