Tema 6. Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. Métodos de resolución
   1. Método de Cramer
   2. Método de Gauss
   3. Forma matricial del sistema. Método de la matriz inversa
2. Discusión de sistemas de ecuaciones lineales
   1. Teorema de Rouche
   2. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales
3. Sistemas homogéneos

Tema 6. Sistemas de Ecuaciones

1. Métodos de resolución

Método de Cramer

$$\begin{cases} 3x-5y=73 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$$

En un sistema distinguiremos varias matrices:

- Matriz del sistema: Los coeficientes de las incógnitas. $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
- Matriz ampliada: Se añaden los términos independientes: $\bar{A}=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 73 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- Matrices adjuntas a las incógnitas: $A_x=\begin{pmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $A_y=\begin{pmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Regla de Cramer: Si se tiene un sistema con $|A|\neq 0$, la solución del sistema es:

$$\boxed{x=\frac{|A_x|}{|A|} \quad ; \quad y=\frac{|A_y|}{|A|}} \qquad x=\frac{156}{26}=6 \quad ; \quad y=\frac{-286}{26}=-11$$

Método de Gauss

$$\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

Se hacen "ceros" debajo de la diagonal en la matriz ampliada

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 73 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad -4f_1 + 3f_2 \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 73 \\ 0 & 26 & -286 \end{array}\right)$$

Se van sacando incógnitas de abajo a arriba $y = \dfrac{-286}{26}$; $x = \dfrac{156}{26}$

Método de la matriz inversa

$$\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 2 \end{pmatrix}} \rightarrow A \cdot X = C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C$$

Forma matricial del sistema

$$A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 73 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 156 \\ -286 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{156}{26} = \frac{78}{13} = 6 \quad ; \quad y = \frac{-286}{26} = \frac{-143}{13} = -11$$

2. Discusión de sistemas de ecuaciones lineales

En los tres métodos anteriores surgen estas dudas:

- ¿Qué pasa si la matriz del sistema no es cuadrada?
- ¿Qué pasa si la matriz del sistema tiene determinante 0?

Discutir el sistema es decidir qué clase de sistema tenemos antes de empezar a resolver, para actuar en consecuencia.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

- Incompatibles: Sin solución
- Compatibles: Con solución
  - Determinados: Solución única
  - Indeterminados: Infinitas soluciones

Ejemplos

$$\begin{cases} 2x-5y=7 \\ 4x+2y=2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 12 & -12 \end{array}\right) \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Sist. Comp. Det.

$$\begin{cases} 2x-5y=7 \\ 4x-10y=2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ 4 & -10 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \quad \begin{cases} y=\nexists \\ x=\nexists \end{cases}$$

Sist. Incompatible.

$$\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 4x-10y=2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 1 \\ 4 & -10 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} y=\lambda \\ x=\dfrac{1+5\lambda}{2} \end{cases}$$

Sist. Comp. Indet.

Teorema de Rouché

Se tiene un sistema de ecuaciones lineales de ***m*** ecuaciones y ***n*** incógnitas.

- Si $r(A) < r(\overline{A})$: sistema incompatible
- Si $r(A) = r(\overline{A})$: sistema compatible
  - Si $r(A) = r(\overline{A}) = n$: sistema compatible determinado
  - Si $r(A) = r(\overline{A}) < n$: sistema compatible indeterminado

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

- Se estudian los rangos de las matrices para aplicar el teorema de Rouché y ver si el sistema es compatible.
- Nos quedamos con la matriz que nos ha dado el rango del sistema.
- Se eliminan las ecuaciones que no forman parte de esa matriz.
- Se pasan al lado de los términos independientes las incógnitas que no forman parte de esa matriz.
- Se resuelve con la regla de Cramer o por el método de Gauss.

Ejemplos

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x+2y=5 \\ 3y+z=1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos menores para estudiar r(A) y r($\bar{A}$)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow r(A)=3 \rightarrow r(\bar{A})=3$$

Sistema compatible determinado

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 10 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-5}{2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{17}{2}$$

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-y=-1 \\ x-4y+3z=4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A)=2$$

Ahora hay que estudiar el rango de la ampliada, puede ser 2 o 3

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow r(\bar{A}) = 3$$

Sistema incompatible: Sin solución

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y = -1 \\ x - 4y + 3z = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(\bar{A}) = 2$$

Sistema compatible indeterminado

Soluciones: Nos quedamos con el menor de orden 2. Se elimina la 3ª ecuación y se pasa la *z* al lado de los términos independientes

$$\begin{cases} z = \lambda \\ x - 2y = -\lambda \\ x - y = -1 \end{cases} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda - 2}{1} = \lambda - 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -1 + \lambda \qquad z = \lambda$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = 4 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad r(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad r(\bar{A})=3$$

Sistema incompatible: Sin solución

3. Sistemas homogéneos

Son sistemas en los que todos los términos independientes son 0.

Aquí siempre se cumple que ***r(A) = r($\bar{A}$)*** , puesto que al hacer r($\bar{A}$) lo que se añade es una columna de "*ceros*" que no aumentan el rango que ya tuviéramos en A.

Por tanto, estos sistemas **siempre son compatibles** y **una solución siempre es *(0 , 0 , 0)*** (¿determinados o indeterminados?)

Ejemplos

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A)=r(\bar{A})=3$$

Sistema compatible determinado

Solución: $x=0 \;\; ; \;\; y=0 \;\; ; \;\; z=0$

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \\ 2x-4y-z=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

No ponemos la última columna puesto que no aporta nada

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow r(A)=r(\bar{A}) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A)=r(\bar{A})=2$$

Sistema compatible indeterminado

Soluciones:

$$\begin{cases} x-y=\lambda \\ x+y=2\lambda \end{cases} \qquad x=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{3\lambda}{2} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix}}{2}=\frac{\lambda}{2} \qquad z=\lambda$$

Infinitas soluciones. En particular, una de ellas es ***(0 , 0 , 0)*** (*haciendo λ = 0*)

Ejercicios

1. Sean $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ -1 & m & m-2\\ m & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

a) Determina el rango de A según los valores del parámetro m.
b) Discute el sistema $AX=B$ según los valores del parámetro m.
c) Resuelve el sistema $AX=B$ para $m=1$.

2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r}2x-4y+6z=6\\ my+2z=m+1\\ -3x+6y-3mz=-9\end{array}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) Resuélvelo para $m=3$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $y=0$.

3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r}x-y+z=0\\ 2x+3y-z=3\end{array}\right\}$

a) Determina el valor de m para el que al añadir la ecuación $x+my+4z=-3$ al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.
b) Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6.

4. Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r}x+ky+2z=k+1\\ x+2y+kz=3\\ (k+1)x+y+z=k+2\end{array}\right\}$

a) Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.
b) ¿Existe algún valor de k para el cual el sistema no tiene solución?.
c) Resuelve el sistema para $k=0$

Ejercicios

5. **Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.**
a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro?. ¿Y el de la calculadora?. Razona las respuestas.
b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50%, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

6. **Considera el sistema de ecuaciones:** $\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+kz=1 \\ 2x+ky \qquad =1 \\ y+2z=k \end{array}\right\}$
a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro k.
b) Resuélvelo para $k=1$.
c) Resuélvelo para $k=-1$.

7. **Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas** $\left.\begin{array}{r} kx+2y=\ \ 2 \\ 2x+ky=\ \ k \\ x-\ \ y=-1 \end{array}\right\}$
a) Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.
b) Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
c) Halla las soluciones en cada caso.

8. **Considera el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas** $\left.\begin{array}{r} x\quad -y\qquad =\lambda \\ 2\lambda y+\lambda z=\lambda \\ -x-y+\lambda z\ =0 \end{array}\right\}$
a) Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.
b) Resuélvelo para $\lambda=0$ y $\lambda=-1$.

9. **Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros, respectivamente. El coste total de la operación ha sido 40.500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30% de las cajas.**