Tema 5. Matrices y Determinantes

1. Definiciones
2. Operaciones
   Propiedades
3. Determinantes
   Orden 2 – Orden 3: Regla de Sarrus – Orden mayor de 3
   Propiedades
4. Matriz inversa
   Ecuaciones matriciales
5. Rango de una matriz
   Método de Gauss
   Método del mayor menor

1. Definiciones

Matriz: es una tabla de números. Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Fila: cualquier linea horizontal

Columna: cualquier linea vertical

A tiene 2 filas y 3 columnas ; B tiene 4 filas y 2 columnas

Dimensión: filas x columnas A_{2x3} ; B_{4x2}

Elemento: es cada número de la matriz $a_{12}=0 \quad ; \quad a_{23}=2 \quad ; \quad b_{31}=5$

Matriz cuadrada: tiene las mismas filas que columnas

$C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $C_{2x2} = C_2$. Dimensión 2x2 ; **Orden** 2

Diagonal de una matriz: la forman los elementos que tienen igual fila que columna. $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular: todos los elementos por debajo de la diagonal son 0

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta: es la que resulta al intercambiar las filas por las columnas

$$A^t=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^t=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad C^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \rightarrow A^t{}_{3\times 2}$$

Matriz simétrica: coincide con su traspuesta $A = A^t$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz sea simétrica, debe ser cuadrada

Matriz fila: sólo tiene una fila $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_{1\times 2}$

Matriz columna: sólo tiene una columna $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q_{3\times 1}$

Matriz nula (Matriz cero) **O**: todos sus elementos son 0

Matriz identidad (Matriz unidad, matriz uno) **I**: todos sus elementos son **0**, excepto los de la diagonal, que son **1**. Debe ser **cuadrada**

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: todos sus elementos son **0**, excepto los de la diagonal, que pueden ser cualesquiera. Debe ser **cuadrada**

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Operaciones

Suma: se necesita que las dos matrices tengan la misma dimensión.

Se suman los elementos que están en la misma posición

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n} \quad ; \quad a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$

Matriz opuesta, –A: se cambian de signo todos los elementos.

$$A+(-A)=A-A=0$$

Producto por un escalar (por un número). Se multiplica cada elemento de la matriz por el número

$$k\cdot A_{m\times n}=P_{m\times n} \quad ; \quad k\cdot a_{ij}=p_{ij}$$

Producto de matrices: se necesita que la dimensión en columnas de la primera coincida con la dimensión en filas de la segunda

$$A_{m\times \mathbf{n}}\cdot B_{\mathbf{n}\times p}=C_{m\times p} \qquad \boxed{A_{3\times \mathbf{2}}\cdot B_{\mathbf{2}\times 4}=C_{3\times 4}}$$

Se multiplican todos los elementos de cada fila de A con todos los elementos de cada columna de B y se van sumando los resultados

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

- ► $A+B=\text{no se pueden sumar}$
- ► $A+C=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$

$$3A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & -1\end{pmatrix}$$

- ► $A_{2\times3}\cdot B_{2\times2}=\text{no se puede hacer}$
- ► $B_{2\times2}\cdot A_{2\times3}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 7\end{pmatrix}_{2\times3}$

El producto no es conmutativo.

A·B ≠ B·A

- ► $A_{2\times3}\cdot C_{2\times3}=\text{no se puede hacer}$
- ► $A_{2\times3}\cdot {C^t}_{3\times2}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}_{2\times2}$

Propiedades:

- Matriz identidad: $A \cdot I = I \cdot A = A$
- Asociativa: $$A \cdot B \cdot C = \left\langle \begin{array}{l} (A \cdot B) \cdot C \\ A \cdot (B \cdot C) \end{array} \right.$$
- Conmutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$ No se cumple la conmutativa

  Generalmente, las dimensiones impiden hacer uno de los dos productos. Aunque puedan hacerse, tampoco salen resultados iguales, ni aunque sean matrices cuadradas
- Distributiva: $$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Productos Notables: No se cumplen

$(A + B)^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ $(= A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2)$

$(A - B)^2 \neq A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$ $(= A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2)$

$(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$ $(= A^2 - A \cdot B + B \cdot A - B^2)$

Ejercicios

1. Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}$

   a) Calcula la matriz inversa de A.
   b) Calcula A^{127} y A^{128}.
   c) Determina x e y tal que $A\cdot B=B\cdot A$.

2. Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera:

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&4&3\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}0&4&-3\\-2&9&-6\\1&-4&4\end{pmatrix}$$

   a) Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$.

   b) Determina una matriz X que verifique la relación: $\frac{1}{2}X+(AB)^t=C$

3. Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&1&-1\\1&0&b\end{pmatrix}$

   a) Determina el valor de b para el que $A^2-2A+I=0$.

4. Sea I la matriz identidad de orden 2 y sea $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

   a) Halla los valores de x para los que la matriz $A-x\cdot I$ no tiene inversa.
   b) Halla los valores de a y b para los que $A^2+a\cdot A+b\cdot I=0$.

5. Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$. Calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A-kI)^2$ es la matriz nula.

3. Determinantes

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Es el número que resulta de hacer todas las multiplicaciones posibles entre los elementos de la matriz, sin que estén en la misma fila o columna, y sumar (o restar) todos los resultados.

Matriz de orden 1:

$$A=(3) \quad ; \quad |A|=3$$
$$B=(-3) \quad ; \quad |B|=-3$$

Matriz de orden 2:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad ; \quad |A|=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Adjunto de un elemento: Es el determinante que resulta de eliminar en una matriz cuadrada la fila y la columna del elemento, con signo + si el elemento ocupa posición par o con signo – si ocupa posición impar.

$$Adjunto\ del\ elemento\ a_{ij} \rightarrow A_{ij}$$

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=-(-6)=6 \quad ; \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-3$$

posición impar *posición par*

Matriz de orden 3 o más: Se elije una linea y se multiplica cada elemento de la línea por sus adjuntos, sumando todos los resultados.

Por ejemplo, si se coge la 1ª columna:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad ; \quad |A|=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}$$

Lo mejor es elegir una línea que tenga muchos ceros.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad |A|=1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-4\cdot(-6)+7\cdot(-3)=0$$

Regla de Sarrus (Regla práctica solo para orden 3):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad ; \quad |A|=\text{Productos: los rojos sumando y los azules restando}$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad;\quad |A|=1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot3-7\cdot5\cdot3-4\cdot2\cdot9-8\cdot6\cdot1=0$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. El determinante no varía al hacer la traspuesta: $|A|=|A^t|$

2. Si una línea es 0, el determinante es 0

3. Si se intercambian dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo

4. Si hay dos líneas paralelas iguales, es determinante es 0

5. Si multiplicamos todos los elementos de una línea por un número, el determinante se multiplica por ese número

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\2&-3&-2\end{vmatrix}=-2+0+6-2-6=-4\quad;\quad\begin{vmatrix}1&0&10\\-2&1&-20\\2&-3&-20\end{vmatrix}=-40$$

Esta propiedad también puede usarse al revés: sacar factor común en una línea:

$$\begin{vmatrix}2&4&6\\4&5&3\\8&5&9\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&3\\8&5&9\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\4&5&1\\8&5&3\end{vmatrix}$$

6. Si dos líneas paralelas son proporcionales, el determinante es 0

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 8 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

la primera y la segunda filas son proporcionales

7. Si a una línea se le suma una combinación lineal de otras paralelas, el determinante no varía

Esta propiedad se usa para conseguir ceros y hacer el determinante más fácil. <u>Método de Gauss</u>:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 10 & -8 \\ -2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -17 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -17 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 18$$

f2 – 3·f1

f3 + 2·f1

8. Si una línea es combinación lineal de otras paralelas, el determinante es 0.

Y al revés, si el determinante es 0, debe haber una línea que sea combinación lineal de otras paralelas

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 24 \\ 4 & 8 & 48 \\ 8 & 5 & 85 \end{vmatrix} = 0$$

c3 = 10·c1 + c2

9. El determinante de un producto es el producto de los determinantes

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Ejemplos

3. Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

4. Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

3a. Una línea es *0* ; el determinante es *0*

3b. La tercera fila es proporcional a la primera: *f3 = -2f1* ; el determinante es *0*

3c. La tercera fila es combinación lineal de la primera y segunda: *f3 = f1 + 10·f2* ; el determinante es *0*

3d. Igual que c.

4a. Una fila está multiplicada por *3* ; el determinante vale *1·3 = 3*

4b. La primera fila está multiplicada por *5* , la segunda por *⅕* ; el determinante vale *1*

4c. A la segunda fila se le ha sumado una combinación lineal de la primera, y la tercera también ; el determinante no varía, vale *1*

4. Matriz Inversa

Solo existe en las matrices cuadradas cuyo determinante no sea 0.

Suma – Resta: Matriz nula O: $A + O = O + A = A$

Matriz opuesta –A: $A + (-A) = O$

Producto – Cociente: Matriz unidad I: $A \cdot I = I \cdot A = A$

Matriz inversa A^{-1}: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Fórmula de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$$

Propiedad: $A \cdot A^{-1} = I \rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| = 1 \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow \boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$

Usando la matriz inversa ya podemos "**dividir matrices**".

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \quad ; \quad \cancel{X = B \cdot A^{-1}}$$

$$X \cdot C - D = A \rightarrow X = (A + D) \cdot C^{-1}$$

Ecuaciones matriciales

Ejemplos:

a) (1'25 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Determine la matriz X que verifica $B \cdot X = 3A + A^t$.

$$X = B^{-1}(3A + A^t)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad 3A + A^t = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule A^2 y A^{2013}.

b) (1'5 puntos)Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + I_2 = 5B^t - A^2$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ $\qquad A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$, $\quad A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$ $\qquad A^{2013} = A^{2012} \cdot A = I \cdot A = A$

b) $X = A^{-1} \cdot (5 \cdot B^t - A^2 - I) = A^{-1} \cdot (5B^t - 2I)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 5B^t - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

5. Rango de una matriz

Método de Gauss

Se van haciendo "ceros" todos los elementos por debajo de la diagonal hasta conseguir una matriz triangular.

El rango es el número de filas que hayan quedado distintas de 0.

Ejemplo:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{-2f1+f2} \\ \text{f1+f3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{2f2+f3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Han quedado 3 filas distintas de 0. El rango es 3. ***r(M) = 3***

Método del mayor menor. Rango es el orden del mayor menor distinto de 0

Menor: cualquier determinante que pueda hacerse dentro de la matriz.

Ejemplo: La misma matriz de antes

Orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ El rango es, al menos 2

Orden 3: Ampliamos el menor de orden 2 que ya tenemos: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ El rango es 3

Orden 4: No puede ser puesto que no hay menores de ese orden

Ejercicios

1. Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

   a) ¿Tiene A inversa?. En caso afirmativo, calcúlala.

   b) Determina la matriz X que cumple que $A\cdot X+C\cdot B^t=B\cdot B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

2. Halla la matriz X que cumple que: $A\cdot X\cdot A-B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

3. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 6 & 6\end{pmatrix}$

   a) Halla, si existe, la matriz inversa de $A\cdot B+C$.

   b) Calcula, si existen, los números reales x e y que verifican: $C\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

4. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$

   a) Determina la matriz $B=A^2-2A$.

   b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

   c) Calcula B^{-1} para $\lambda=1$.

5. a) Calcula el valor de m para el que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2-A=I$ y determina A^{-1} para dicho valor de m.

   b) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2-M=I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.

Ejercicios

6. Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A-2I$ es cero.
b) Calcula la matriz inversa de $A-2I$ para $\lambda=-2$.

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B.
b) Resuelve la ecuación matricial $A\cdot X+B=A+I$, donde I denota la matriz identidad de orden

8. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.
b) Para $k=0$, halla la matriz inversa de A.

9. Sean A, B, C y X matrices cualesquiera que verifican $A\cdot X\cdot B=C$.
a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el de C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$.

b) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X.

10. Obtén un vector no nulo $v=(a,b,c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Ejercicios

11. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3=-I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.

c) Calcula razonadamente A^{100}

12. Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y A^2-B^2

b) Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$

13. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de A dependiendo de los valores α.

b) Para $\alpha=2$, resuelve la ecuación matricial $A\cdot X=B$.

14. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $\frac{1}{12}A$.