Tema 2. Derivadas

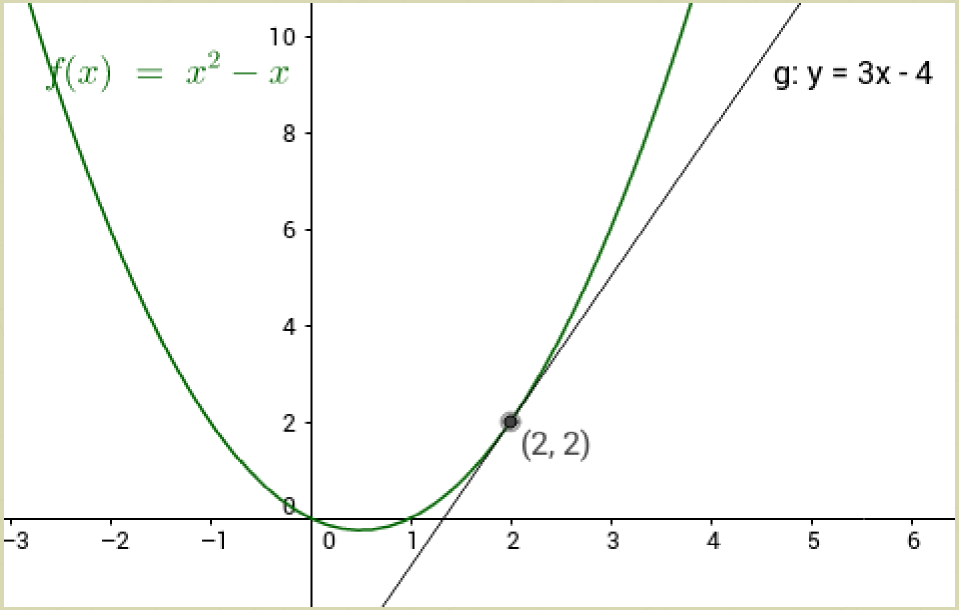
1. Definición

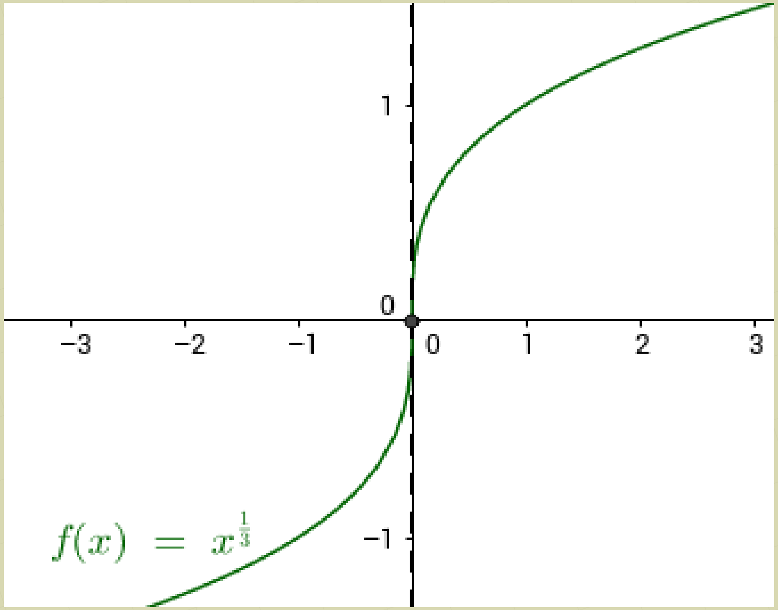
Derivada de una función f en un punto a :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ejemplos:

- $$f(x)=x^2-x$$
  $$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3$$
  $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-x-a^2+a}{x-a}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{(x+a-1)(x-a)}{x-a}=2a-1$$
- $$f(x)=\sqrt[3]{x}$$
  $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty \quad \to \textit{La función no es derivable en } x=0$$





$f'(2)=3$ $f'(0)=\infty$ No hay derivada en x=0

La derivada es la inclinación de la recta tangente

2. Recta tangente y normal

Recta tangente a la gráfica de una función f(x) en un punto x = a en el que es derivable:

$$t: y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Recta normal a la gráfica de una función f(x) en un punto x = a en el que es derivable:

$$n: y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Ejemplo: $y = -x^2 + 3x$; $x = 1$

Rectas tangente y normal en $x = 1$:

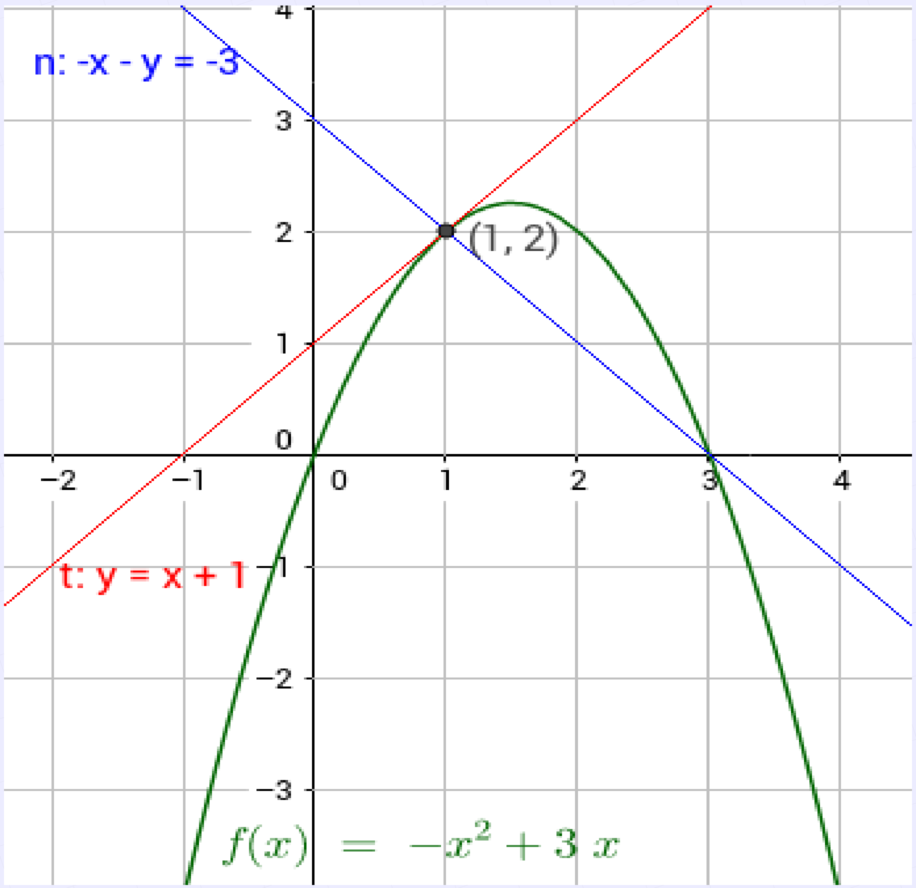
$y(1) = 2$

$y'(x) = -2x + 3$; $y'(1) = 1$

t: $y - 2 = 1 \cdot (x - 1)$; $\boldsymbol{t : y = x + 1}$

n: $y - 2 = -1 \cdot (x - 1)$; $\boldsymbol{n : y = -x + 3}$

geogebra



3. Derivadas laterales. Estudio de la derivabilidad de una función

Derivadas laterales:

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La función es derivable en *x = a* si es continua y coinciden las los derivadas laterales.

- Si una función es derivable en un punto, debe ser continua.
- Si una función es continua en un punto, puede ser derivable o no.

Ejemplos: Estudia la derivabilidad de las funciones *f* y *g* :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \quad , & si\; x<2 \\ -3x+10 \;, & si\; x\geq 2 \end{cases}$$

Los dos trozos de f son funciones continuas y derivables por ser polinómicas. El único punto a estudiar es *x = 2*

Primero se estudia la continuidad: si no es continua, tampoco es derivable

$$\begin{cases} f(2)=4 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=4 \end{cases}$$

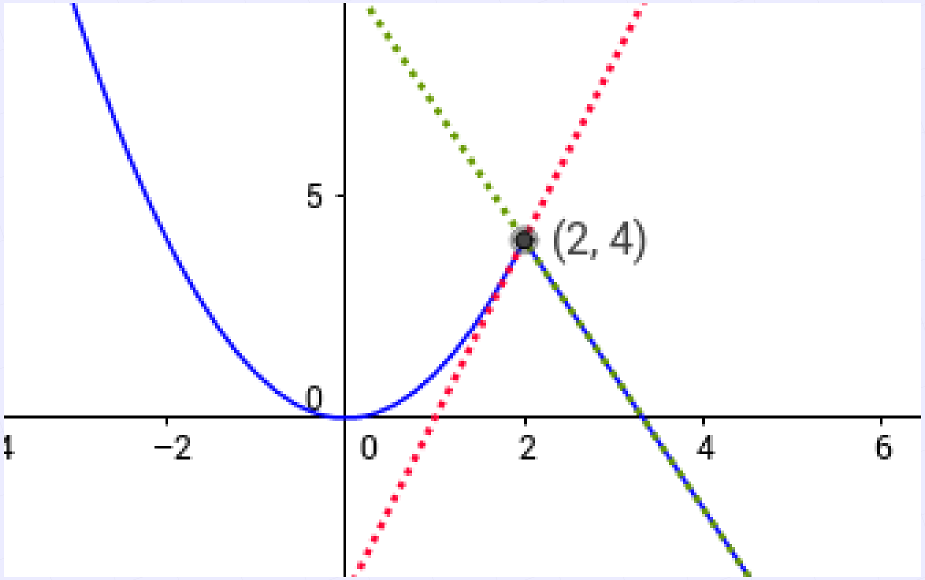
La función es continua en ℝ

Ahora la derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases} 2x \quad , & si\; x<2 \\ -3 \quad , & si\; x>2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(2^-)=4 \\ f'(2^+)=-3 \end{cases}$$

La función no es derivable en *x = 2*

La función es derivable en ℝ - {2}



geogebra

Ejemplos: Estudia la derivabilidad de las funciones *f* y *g* :

$$g(x)=\begin{cases} x^2 \quad , & si\, x<2 \\ -x^2+8x-8 \, , & si\, x\geq 2 \end{cases}$$

Los dos trozos de *g* son funciones continuas y derivables por ser polinómicas. El único punto a estudiar es *x = 2*

Primero se estudia la continuidad: si no es continua, tampoco es derivable

$$\begin{cases} g(2)=4 \\ \lim_{x\to 2^-} g(x)=4 \\ \lim_{x\to 2^+} g(x)=4 \end{cases}$$

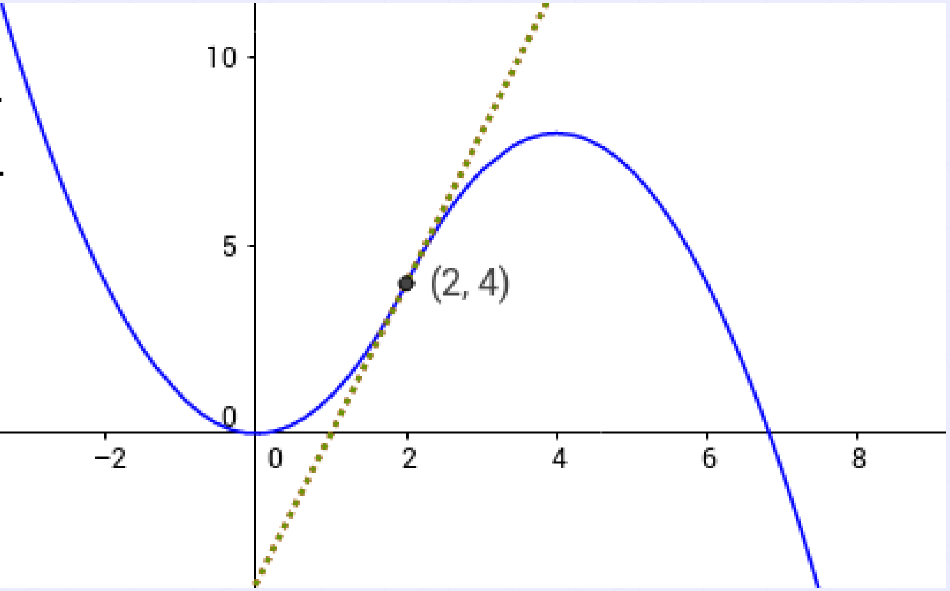
La función es continua en ℝ

Ahora la derivabilidad

$$g'(x)=\begin{cases} 2x \quad , & si\, x<2 \\ -2x+8 \quad , & si\, x>2 \end{cases} \qquad \begin{cases} g'(2^+)=4 \\ g'(2^-)=4 \end{cases}$$

La función es derivable en *x = 2*

La función es derivable en ℝ



4. Monotonía y curvatura de una función

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo I.

- Si $f'(x) > 0$ en todo I : f es **creciente** en I
- Si $f'(x) < 0$ en todo I : f es **decreciente** en I

Punto crítico o singular: es un punto que anula la derivada. $f'(a) = 0$.

- Si $f''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo
- Si $f''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo
- Si $f''(a) = 0$, $x = a$ es un punto de inflexión

Sea $y = f(x)$ una función derivable dos veces en un intervalo I.

- Si $f''(x) > 0$ en todo I : f es **convexa** en I
- Si $f''(x) < 0$ en todo I : f es **cóncava** en I

6. Cálculo de límites. Regla de L'Hôpital

Si al hacer un límite de un cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se obtiene una indeterminación $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ ó $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

puede hacerse el mismo límite con $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ El resultado del segundo será válido para el primero

Ejercicios

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3-x)e^x - 2x - 3}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(3-x)e^x - 2x - 3}{x^2}$$

Ejercicios

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por: $f(x)=\left|8-x^2\right|$

   a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores).
   b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x=-2$.

2. Sea f la función definida para $x\neq 1$ por $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$

   a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.
   b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f.
   c) Esboza la gráfica de f.

3. Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\,sen\,x}{x^3-x^2}$

4. Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es $5x-y-3=0$.

5. a) Determina el valor de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\leq 0 \\ ax+b & si \quad x>0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto $(0,1)$.

   b) ¿Existen constantes c y d para las cuales la gráfica de la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\leq 0 \\ cx^2+d & si \quad x>0 \end{cases}$ admita recta tangente en el punto $(0,1)$?.

6. Calcula: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\cdot e^{-3x}$

7. Considera la función $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=3x-2$. Calcula el punto de la gráfica de f más cercano al punto $(2,6)$ y calcula también el más alejado.

Ejercicios

8. Determina α sabiendo que existe y es finito el límite $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - \operatorname{sen} x}$. Calcula dicho límite.

9. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$
a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

10. Sea f la función definida por $f(x)=\frac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x\neq 0$ y $x\neq 2$.
a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f.

11. Determina el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+3x^2+cx+d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y=3x+4$.

12. Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen} x}{x} & si \quad x>0\\ 1 & si \quad x\leq 0\end{cases}$.

13. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=x^2\cdot e^{\frac{x}{2}}$.
a) Calcula: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
b) Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

14. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x^3-5x^2+5x+3$ y sea r la recta de ecuación $2x+y=6$.
a) Determina, si es posible, un punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea r.
b) ¿Hay algún punto de la gráfica de f en el que la recta normal a la gráfica sea r?. Justifica la respuesta.

Ejercicios

15. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases}3ax+b & si \;\; x\le 0\\ e^{x(ax+b)} & si \;\; x>0\end{cases}$. Determina a y b sabiendo que f es derivable.

16. Considera la curva de ecuación $y=\dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3}$.

a) Determina sus asíntotas.

b) ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto?. Justifica la respuesta.