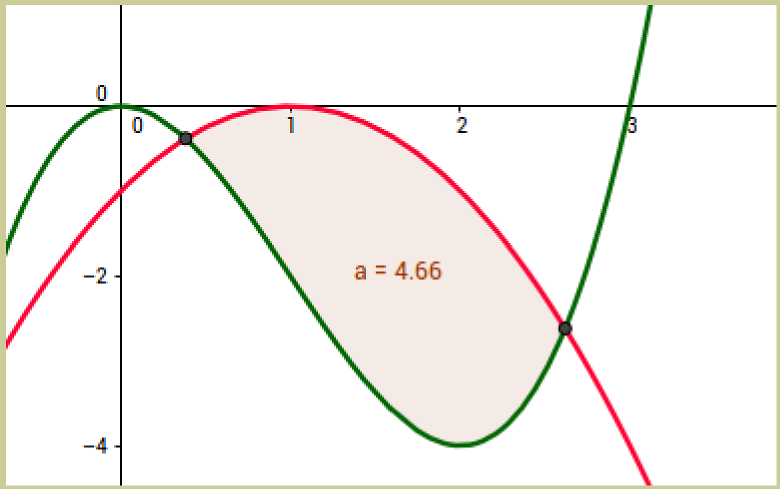
Bloque I: Análisis

1. Límites y continuidad
   1. Indeterminaciones
   2. Tipos de discontinuidad
2. Derivadas
   1. Recta tangente y normal
   2. Derivadas laterales. Derivabilidad
   3. Regla de L'Hopital
   4. Estudio gráfico de funciones
   5. Problemas de optimización
3. Integrales
   1. Integral indefinida
   2. Integral definida: Cálculo de áreas



Tema 1: Límites y Continuidad

Límites de funciones

- Funciones polinómicas: $f(x)=x^3-2x^2+x$

  Función continua en ℝ por ser polinómica

$$\lim_{x\to 0}(x^3-2x^2+x) \qquad \lim_{x\to +\infty}(x^3-2x^2+x) \qquad \lim_{x\to -\infty}(x^3-2x^2+x)$$

- Funciones racionales: $f(x)=\frac{x^3-2x^2+x}{x-1}$

  Dom f = ℝ – {1}. Función continua en ℝ – {1}

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+x}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x-1} \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-2x^2+x}{x-1}$$

- Funciones radicales $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$

  Dom f = (-∞ , -1] ⋃ [0 , +∞) . Función continua en su dominio

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+x}-x \qquad \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}-x \qquad \lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x}-x$$

- Funciones exponenciales $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

  Dom f = ℝ – {0}. Función continua en ℝ – {0}

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

- Funciones logarítmicas: $f(x)=\ln(2-x)$

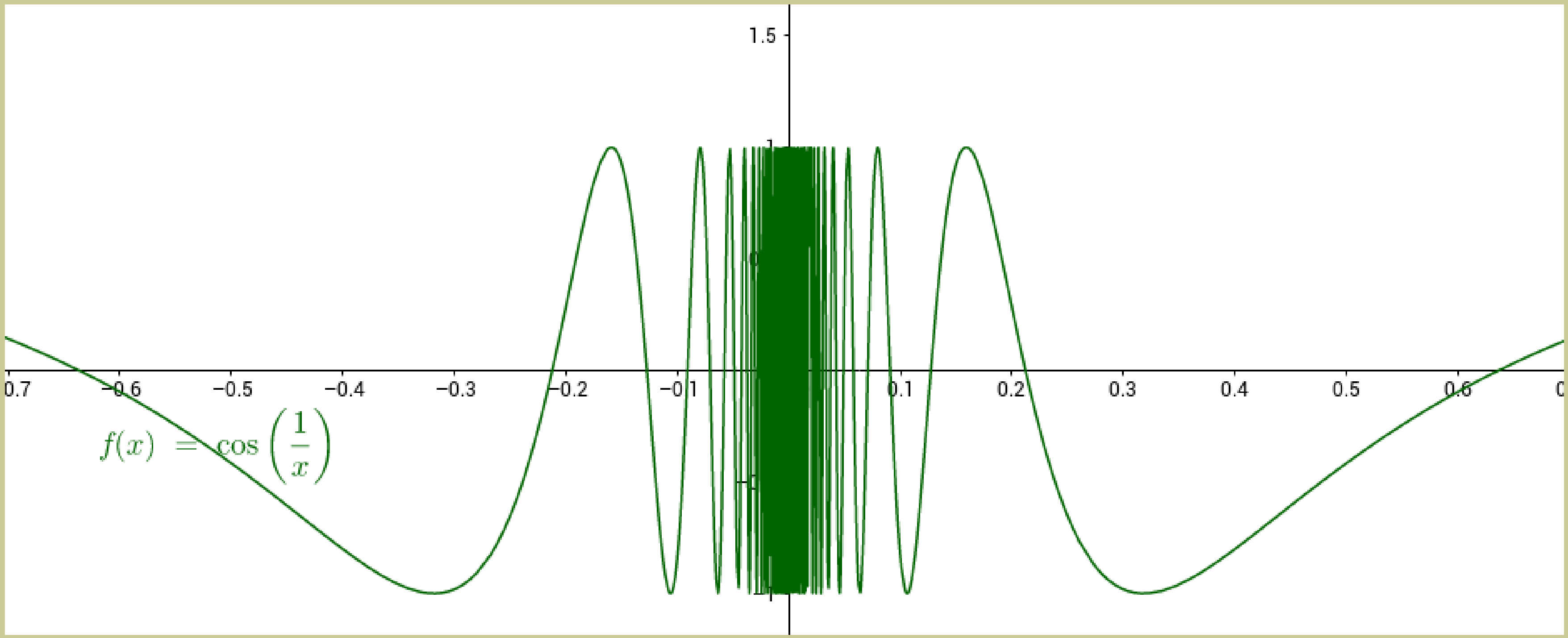
Dom f = (-∞ , 2). Función continua en su dominio

$$\lim_{x\to 2}\ln(2-x) \qquad \lim_{x\to +\infty}\ln(2-x) \qquad \lim_{x\to -\infty}\ln(2-x)$$

- Funciones trigonométricas: $f(x)=\cos\frac{1}{x}$

Dom f = ℝ – {0}. Función continua en ℝ – {0}

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to +\infty}\cos\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to -\infty}\cos\frac{1}{x}$$



Comparación de infinitos

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty$,

se dice que $f(x)$ es un **infinito de orden superior** a $g(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Dadas dos potencias de x, la de mayor exponente es un *infinito de orden superior*:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{7x^3} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{4/3}}{5x} = +\infty$$

Dadas dos funciones exponenciales de bases mayores que 1, la de mayor base es un *infinito de orden superior*:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{1\,000 \cdot 1{,}5^x} = +\infty$$

Cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un *infinito de orden superior* a cualquier potencia:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1{,}2^x}{1\,000 \cdot x^{20}} = +\infty$$

Tanto las funciones exponenciales de base mayor que 1 como las potencias de x son *infinitos de orden superior* a cualquier función logarítmica.

Dos polinomios del mismo grado o dos potencias de la misma base son *infinitos del mismo orden*:

$7x^5 + 3x^4 + 1\,000$ y $x^5 - 10x^4 - 2\,000$ son infinitos del mismo orden.

$100 \cdot 2^x$ y $0{,}01 \cdot 2^x$ son infinitos del mismo orden.

Si en una suma hay varios sumandos infinitos, el orden de la suma es el del sumando de mayor orden:

$3x^4 - 5x^3 + 7$ es un infinito del mismo orden que x^4.

$x^{20} + 7 \cdot 1{,}1^x$ es un infinito del mismo orden que $1{,}1^x$.

Ejercicio

Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$\log_2 x \qquad \sqrt{x} \qquad x^2 \qquad 3x^5 \qquad 1{,}5^x \qquad 4^x$

Indeterminaciones

Se dice que tenemos una **indeterminación** cuando al hacer un límite no podemos saber su resultado sólo con conocer las funciones que intervienen. Esto nos obliga a hacer un estudio más profundo.

Las indeterminaciones que nos podemos encontrar son:

$$(+\infty)-(+\infty) \qquad (\pm\infty)\cdot(0) \qquad \frac{(0)}{(0)} \qquad \frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$$

$$(+\infty)^{(0)} \qquad (1)^{(+\infty)} \qquad (0)^{(0)}$$

Ejercicios

1. Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1})$ b) $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$ d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

2. Sin operar, di el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$ b) $x^2 + 2^x$

c) $x^2 - 2^x$ d) $x^2 - 2^{-x}$

e) $2^{-x} - 3^{-x}$ f) $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$ h) $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$

i) $\sqrt[3]{x+2} - x^2$ j) $3^{-x} - 2^{-x}$

3. Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3 - x}{x-2}$ d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

Continuidad de funciones

- Funciones con una sola expresión: las funciones que usamos normalmente son continuas en su dominio. *(Aunque hay funciones con una sola expresión no continuas en su dominio)*
- Funciones a trozos: son continuas en su dominio, excepto, quizá, en los puntos de ruptura. Estos puntos hay que estudiarlos aparte para decidir.

Cuando se detecta un posible punto de discontinuidad *x = a* , se estudia $f(a)$ y $\lim_{x \to a} f(x)$ para decidir

- Si $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$: la función es continua en *x = a*
- Si $f(a) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$: discontinuidad evitable en *x = a*
- Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = k \neq k' = \lim_{x \to a^+} f(x)$: discontinuidad de salto finito en *x = a*
- Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$: discontinuidad de salto infinito en *x = a*

geogebra

Ejercicios

1. **Estudia la continuidad de las siguientes funciones y dibuja su gráfica:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

2. **Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo su dominio. Represéntalas para el valor de k obtenido:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} kx^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ e^{x^2-4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

3. *Dada la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x^2-2)/x} & si \;\; x < 0 \\ k & si \;\; x = 0 \\ 1 - \ln x & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua?

b) Hallar el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de la función.

4. **Considera la función $f:(-\infty,10) \to \mathbb{R}$ definida por** $f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & si \;\; x < 2 \\ |x-5| & si \;\; 2 \leq x < 10 \end{cases}$

a) Determina el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$).
b) Esboza la gráfica de f.
c) Estudia la derivabilidad de f.
MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

Ejercicios

5. a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua en todo valor de x.

6. **1B.-** a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \Re$ para que la función $f(x) = \dfrac{ax^2+bx}{x+1}$ tenga como asíntota oblicua la recta **y = 2x + 3. (1,5 puntos)**

7. **B.** Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}}$, donde $\boldsymbol{\ln(x)}$ es el logaritmo neperiano de $\boldsymbol{x}$,

a) Determina su dominio y sus asíntotas.

8. b) Calcula el limite $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$

9. **B.** Se sabe que la recta recta $\boldsymbol{x = -3}$ es una asíntota vertical de la función $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2}{x-a}}$. Calcula el valor del parámetro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro la función $\boldsymbol{f(x)}$ tiene asíntotas horizontales u oblicuas.

10. **1B.** Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x-2}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4} \qquad \textbf{(1,25}$$