SOLUCIONES
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía Matemáticas II
Examen Septiembre Suplente. Año 2019

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- Se considera la función $f:(-2\pi,2\pi)\to\mathbb{R}$ definida por

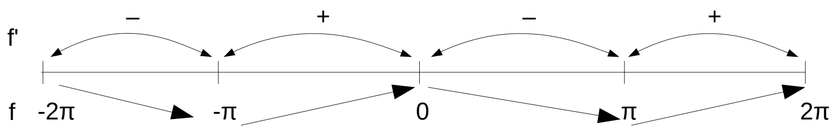
$$f(x)=\frac{\cos(x)}{2+\cos(x)}$$

(a) [1,5 puntos] Calcula sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

(b) [1 punto] Halla sus máximos y mínimos relativos (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

A.1.a) $Dom f=(-2\pi,2\pi)$, puesto que la ecuación $2+\cos x=0$ no tiene solución.

$$f'(x)=\frac{-senx(2+cosx)+cosx\,senx}{(2+cosx)^2}=\frac{-2\,sen\,x}{(2+cosx)^2}\quad;\quad f'(x)=0\ \rightarrow\ x=0\ ,\ x=\pi\ ,\ x=-\pi$$

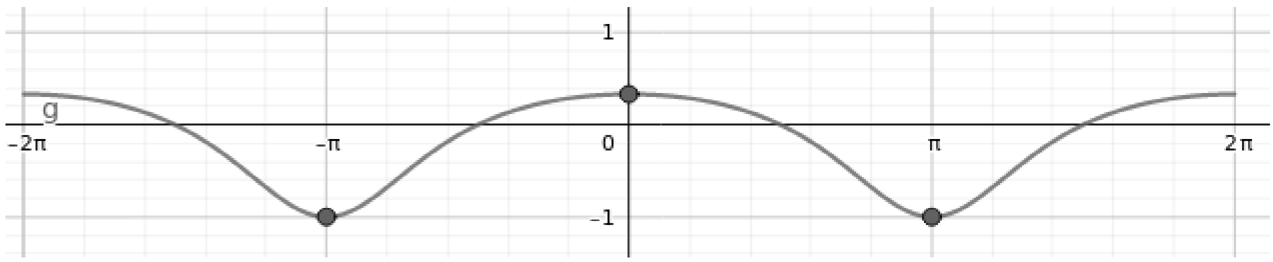


Es decreciente en: *(–2π , π) , (0 , π)* . Es creciente en *(–π , 0) , (π , 2π)*

A.1.b) Tiene mínimos relativos (y absolutos) en (*x = –π , y = –1*) y en (*x = π , y = –1*)

Tiene máximo relativo (y absoluto) en (*x = 0 , y = ⅓*).

(En x = -2π y en x = 2π no hay máximos porque el intervalo es abierto, no hay puntos)



Ejercicio 2.- Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$ para $x\neq 1,-1$.

(a) [2 puntos] Halla todas las funciones primitivas de f.

(b) [0,5 puntos] Calcula la primitiva que pasa por $(2,0)$.

A.2.a) Se trata de hacer la integral. Es una racional

$$\frac{x^4}{x^2-1}=x^2+1+\frac{1}{x^2-1}\quad.\quad F(x)=\int(x^2+1-\frac{1}{x^2-1})dx=\frac{x^3}{3}+x-I_1$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{\frac{-1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\quad.\quad I_1=\frac{-1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|$$

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+K$$

A.2.b) $F(2)=0\ \rightarrow\ \frac{8}{3}+2+\frac{1}{2}\ln 3+K=0\ \rightarrow\ K=\frac{-14}{3}+\frac{1}{2}\ln 3\quad.\quad F(x)=\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{14}{3}+\frac{1}{2}\ln 3$

Ejercicio 3.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de la que se sabe que tiene determinante 5.

(a) [1,75 puntos] Calcula, indicando las propiedades que utilices, los determinantes de las matrices siguientes:

$3A$ y $\begin{pmatrix} 2a & d+3a & g \\ 2b & e+3b & h \\ 2c & f+3c & i \end{pmatrix}$.

(b) [0,75 puntos] Si B es otra matriz cuadrada de orden 3 y tiene determinante 4, calcula, indicando también las propiedades que utilices, el determinante de la matriz BA^{-1}.

A.3.a.1) $|kA|=k^3|A| \rightarrow |3A|=3^3\cdot 5=135$

A.3.a.2) La primera columna se ha multiplicado por k: el determinante se multiplica por k

La segunda columna se ha cambiado por una combinación lineal de otras dos: el determinante no varía

Se ha hecho la matriz traspuesta, el determinante no varía: $|M^t|=|M|$

Por tanto, el determinante de la segunda matriz vale *2·5 = 10*

A.3.b) Usamos dos propiedades: $|M\cdot N|=|M|\cdot|N|$; $|M^{-1}|=\dfrac{1}{|M|}$

Por tanto, $|B\cdot A^{-1}|=\dfrac{|B|}{|A|}=\dfrac{5}{4}$

Ejercicio 4.- Sea r la recta que pasa por el punto $P(2,-2,-1)$ con vector director $\vec{v}=(k,3+k,-2k)$ y sea π el plano de ecuación $-x+2y+2z-1=0$.

(a) [0,5 puntos] Calcula el valor de k para que r sea paralela a π.

(b) [0,5 puntos] Calcula el valor de k para que r sea perpendicular a π.

(c) [1,5 puntos] Para $k=-1$, calcula los puntos de r que distan 3 unidades de π.

A.4.a) El director de la recta debe ser perpendicular al normal del plano:

$\vec{n}=(-1,2,2)$; $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$; $-3k+6=0$; $k=2$

A.4.b) Ahora los vectores deben ser paralelos, o sea, proporcionales:

$$\frac{k}{-1}=\frac{3+k}{2}=\frac{-2k}{2} \rightarrow k=-1$$

A.4.c) Tomamos un punto genérico y aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$P(2-t,-2+2t,-1+2t) \quad . \quad d(P,\pi)=\frac{|-2+t-4+4t-2+4t-1|}{\sqrt{9}}=\frac{|9t-9|}{3}$$

$$\frac{|9t-9|}{3}=3 \rightarrow \begin{cases} 9t-9=9 \ ; \ t=2 \\ -9t+9=9 \ ; \ t=0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se sabe que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c,$$

tiene un punto de inflexión para $x=1$ y que la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en ese punto es $y=-6x+6$. Calcula a, b y c.

B.1) Punto de inflexión: $f''(1)=0$

Recta tangente: $f'(1)=-6$, ya que la pendiente es *–6*

$f(1)=0$, ya que en la recta tangente tenemos que $y(1)=0$

$f(1)=2+a+b+c$ $\qquad c=4$

$f'(x)=6x^2+2ax+b$ $\qquad f'(1)=6+2a+b$ $\qquad b=0$

$f''(x)=12x+2a$ $\qquad f''(1)=12+2a$ $\qquad a=-6$

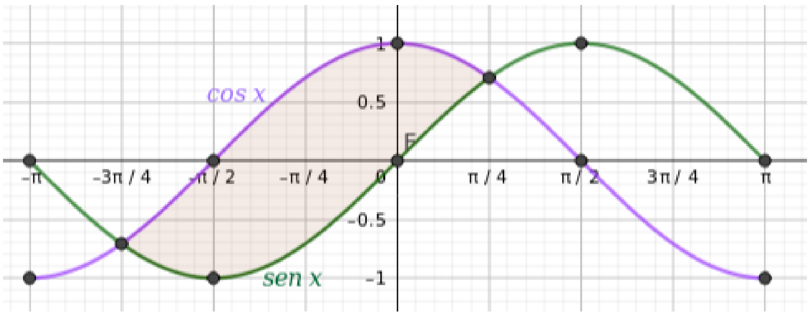
Ejercicio 2.- Considera las funciones $f,g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\cos(x)$ y $g(x)=\operatorname{sen}(x)$.

(a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto delimitado por las gráficas de f y de g en el intervalo $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

B.2.a) Puntos de corte: $\cos x=\operatorname{sen} x \rightarrow 1=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=tg\,x \rightarrow x=arc\,tg\,1=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & (45^\circ)\\ -3\frac{\pi}{4} & (-135^\circ)\end{cases}$. Puntos: $\begin{cases}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ \left(-3\frac{\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$

Para la gráfica hacemos una tabla de valores con ángulos de 90° en 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$



B.2.b) $\int_{-3\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\operatorname{sen} x)\,dx=[\operatorname{sen} x+\cos x]_{-3\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\,u^2$

Ejercicio 3.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) [1,5 puntos] Encuentra los valores de a para los que el sistema dado por $AX = 2X$ tiene infinitas soluciones.

(b) [1 punto] Para $a = 0$, si es posible, resuelve $AX = 2X$.

B.3.a) $AX=2X \rightarrow AX-2X=0 \rightarrow AX-2IX=0 \rightarrow (A-2I)X=0$

Tenemos un sistema homogéneo con la matriz $M=A-2I$

Tendrá infinitas soluciones si el rango de la matriz no es *3*:

$$M=\begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix} \quad ; \quad |M|=a^3-6a^2+9a \quad ; \quad |M|=0 \rightarrow a=0 \ , \ a=3$$

El sistema tiene infinitas soluciones si $a=0$ o $a=3$

B.3.b) $M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$. El rango es 2

Nos quedamos con la primera y segunda ecuaciones y damos valor paramétrico a *z*:

$$\begin{cases} -2x+y=-t \\ x-2y=-t \end{cases} \ ; \ x=\frac{\begin{vmatrix} -t & 1 \\ -t & -2 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3t}{3}=t \ ; \ y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -t \\ 1 & -t \end{vmatrix}}{-5}=\frac{3t}{3}=t \ ; \ z=t \ ; \ \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(-5,3,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

(a) [1 punto] Calcula la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r.

(b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

B.4.a) $r:\begin{cases} Q(0,3,2) \\ \vec{v}=(2,2,-1) \end{cases} \ ; \ \pi:(P,\overrightarrow{PQ},\vec{v}) \ ; \ \begin{vmatrix} x+5 & y-3 & z-1 \\ -5 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 2x-7y-10z+41=0$

B.4.b) Obtenemos un plano que pase por *P* y sea perpendicular a *r* , usando el vector de la recta como normal del plano:

$\alpha:(P,\vec{v}) \ ; \ \alpha:2x+2y-z+D=0$. Imponemos que pase por *P*: $-10+6-1+D=0 \rightarrow D=5$

$\alpha:2x+2y-z+5=0$.

Calculamos el punto de corte de *r* y *α* , usando un punto genérico de la recta:

$A(2t,3+2t,2-t) \ ; \ 2(2t)+2(3+2t)-(2-t)+5=0 \rightarrow t=-1$. $A(-2,1,3)$

Ya tenemos la recta que se pide:

$s:(P,\overrightarrow{PA})=(x,y,z)=(-5,3,1)+k(3,-2,2)$