Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada la función $f:\,(0,2\pi)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\operatorname{sen}(x)+\cos(x)$, calcula sus máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la gráfica de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

A.1) $Dom(f)=(0\,,\,2\pi)$. Calculamos la primera y segunda derivadas.

$f'(x)=\cos x-sen\,x \quad ; \quad f''(x)=-sen\,x-\cos x$

<u>Extremos relativos:</u>

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; \cos x=sen\,x$. Para seguir vamos a pasar el *cos* dividiendo y conseguiremos la *tangente*.

Pero antes hay que asegurarse de que el *cos* no es *0*. Si fuese *0*, el *sen* también sería *0*. Esto es imposible, puesto que no hay ningún ángulo que cumpla eso.

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; \cos x=sen\,x \;\rightarrow\; 1=tg\,x \;\rightarrow\; x=arc\,tg\;1=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\;(45^{o})\\[2mm] \dfrac{5\pi}{4}\;(225^{o})\end{cases}$$

Utilizamos la segunda derivada para comprobar si son máximos o mínimos:

$f''(\frac{\pi}{4})<0 \;\rightarrow\; máximo\;\;relativo \quad , \quad f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$

$f''(\frac{5\pi}{4})>0 \;\rightarrow\; mínimo\;\;relativo \quad , \quad f(\frac{5\pi}{4})=-\sqrt{2}$

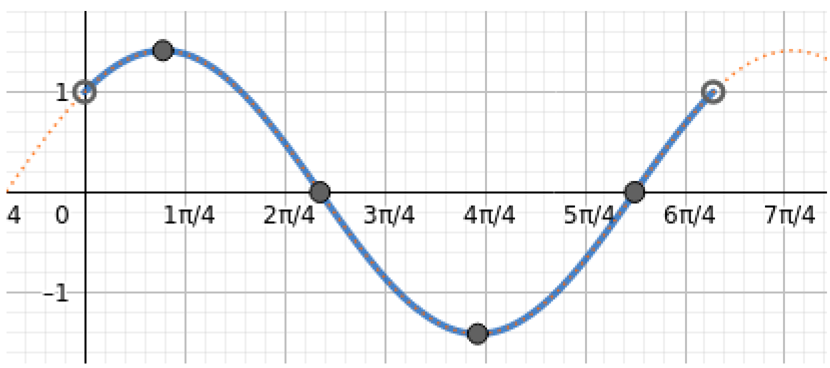
<u>Puntos de inflexión:</u>

$$f''(x)=0 \;\rightarrow\; \cos x=-sen\,x \;\rightarrow\; -1=tg\,x \;\rightarrow\; x=arc\,tg\;(-1)=\begin{cases}\dfrac{3\pi}{4}\;(135^{o})\\[2mm] \dfrac{7\pi}{4}\;(315^{o})\end{cases}$$

Utilizamos la tercera derivada para comprobar si son puntos de inflexión:

$f'''(x)=-\cos x+sen\,x \;\rightarrow\; f'''(\frac{5\pi}{4})\neq 0 \;\rightarrow\; punto\;\;de\;\;inflexión \quad , \quad f(\frac{3\pi}{4})=0$

$f'''(\frac{7\pi}{4})\neq 0 \;\rightarrow\; punto\;\;de\;\;inflexión \quad , \quad f(\frac{7\pi}{4})=0$



Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 & \text{si} \quad x \le 4 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

(a) **[1,5 puntos]** Calcula los puntos de corte entre la gráfica de f y la recta $y = 2x - 4$. Esboza el recinto que delimitan la gráfica de f y la recta.

(b) **[1 punto]** Calcula el área del recinto anterior.

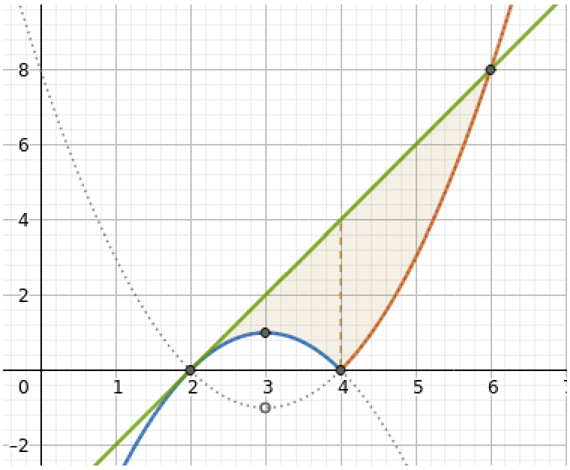
A.2.a) Igualamos cada trozo con la recta y resolvemos:

$$\begin{cases} -x^2+6x-8=2x-4 \;\rightarrow\; x=2 \\ x^2-6x+8=2x-4 \;\rightarrow\; x=6 \end{cases}$$. Los puntos de corte son *(2 , 0)* y *(6 , 8)*.

Los dos trozos de la función se unen en el punto *(4 , 0)*

Calculamos también los vértices de las parábolas para hacer la gráfica:

$$\begin{cases} -x^2+6x-8 \;\rightarrow\; x=3;\, y=1 \\ x^2-6x+8 \;\rightarrow\; x=3;\, y=-1 \end{cases}$$



A.2.b) Calculamos el área de cada trozo y sumamos:

$$A_1=\int_2^4 (2x-4+x^2-6x+8)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+4x\right]_2^4$$

$$A_1=\frac{16}{3}-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$$

$$A_2=\int_4^6 (2x-4-x^2+6x-8)\,dx=\left[\frac{-x^3}{3}+4x^2-12x\right]_4^6$$

$$A_2=0+\frac{16}{3}=\frac{16}{3} \quad . \quad A=A_1+A_2=8\;u^2$$

Ejercicio 3.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) [1,25 puntos] Estudia el rango de A según los valores de m.

(b) [1,25 puntos] Sabiendo que para $m = 1$ el sistema dado por $AX = B$ tiene solución, encuentra k y resuélvelo.

A.3.a) $|A| = -m^2 + 2m - 1$; $|A| = 0 \rightarrow m = 1$

1. Si $m \neq 1 \rightarrow rang(A) = 3$
2. Si $m = 1$: $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\rightarrow rang(A) = 2$

A.3.b) El sistema es compatible, por tanto $rang(A) = 2 = rang(\bar{A})$

$\bar{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k$. Como el rango no es 3 , debe ser $k = 0$

Para resolver usamos las dos primeras ecuaciones y damos valor paramétrico a z :

$\begin{cases} x + y = -t \\ y = 1 \end{cases}$. Las soluciones son: $(-1-t\ ,\ 1\ ,\ t)$

Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{5}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$.

(a) [1,25 puntos] Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.

(b) [1,25 puntos] Calcula la distancia entre r y π.

A.4.a) Usamos el punto de la recta, su vector director, y el normal del plano:

$r: \begin{cases} P(4,0,1) \\ \vec{v} = (2,1,5) \end{cases}$; $\alpha: \begin{cases} P(4,0,1) \\ \vec{v} = (2,1,5) \\ \vec{n} = (2,1,-1) \end{cases}$; $\alpha: \begin{vmatrix} x-4 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $\alpha: -6x + 12y + 24 = 0$

A.4.b) Estudiamos la posición relativa entre la recta y el plano:

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \rightarrow r \| \pi$. Al ser paralelos hay que calcular la distancia de un punto de la recta al plano:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 4 + 0 - 1 + 3|}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}}\ u$$

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Considera la función f definida por

$$f(x)=\frac{a\,x+b}{c\,x+1} \quad \text{para} \quad cx+1\neq 0\,.$$

Determina a, b y c sabiendo que la recta $x=-1$ es una asíntota vertical a la gráfica de f y que $y=2\,x+4$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

B.1) Asíntota vertical en $x=-1$: $c(-1)+1=0 \rightarrow c=1$

Recta tangente $y=2x+4$ en $x=1$: $\begin{cases} f'(1)=2 \\ f(1)=2\cdot 1+4=6 \end{cases}$

$$f'(x)=\frac{a(x+1)-(ax+b)}{(x+1)^2}=\frac{a-b}{(x+1)^2} \quad ; \qquad f'(1)=\frac{a-b}{4}=2 \rightarrow a-b=8$$

$$f(1)=\frac{a+b}{2}=6 \rightarrow a+b=12 \quad ; \quad a=10 \quad ; \quad b=2$$

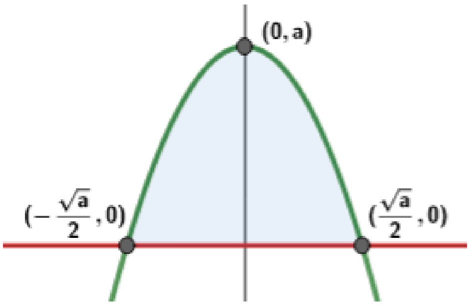
Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=-4x^2+a$, siendo $a>0$ un número real. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=0$. Calcula a sabiendo que el área del recinto es 18.

B.2) Es una parábola con las ramas hacia abajo. Calculamos el vértice y los cortes con los ejes:

Corte en el eje Y: $x=0 \rightarrow y=a$

Cortes en el eje X: $y=0 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{a}}{2}$

Vértice: $x=0 \rightarrow y=a$



$$A=\int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}}(-4x^2+a)\,dx=\left[-4\frac{x^3}{3}+ax\right]_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}}=$$

$$=(-4\frac{a\sqrt{a}}{24}+a\frac{\sqrt{a}}{2})-(4\frac{a\sqrt{a}}{24}-a\frac{\sqrt{a}}{2})=\frac{-a\sqrt{a}}{3}+a\sqrt{a}=2\frac{a\sqrt{a}}{3}$$

Imponemos el dato del área: $A=18 \rightarrow a\sqrt{a}=27 \rightarrow \sqrt{a^3}=27 \rightarrow a^3=27^2 \rightarrow a=27^{\frac{2}{3}}=3^2=9$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx+(m+1)z &= m \\ my+z &= m \\ y+mz &= m \end{cases}$$

(a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

(b) [0,75 puntos] Resuélvelo, si es posible, para $m=1$.

B.3.a) Estudiamos el rango de la matriz del sistema y de la ampliada:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & m+1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}=0 \rightarrow m^3-m=0 \rightarrow m=0 \ , \ m=\pm 1$$

1. Si $m\neq 0$, ± 1 : *rang(A) = 3 = rang($\overline{A}$) = n* $\rightarrow$ Sistema compatible determinado

2.1. Si $m=0$: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$

Ampliamos ese menor: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$ *rang(A) = 2 = rang($\overline{A}$) ; n = 3* $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

2.2. Si $m=-1$: $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$

Ampliamos ese menor: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$ *rang(A) = 2 ; rang($\overline{A}$) = n = 3* $\rightarrow$ Sistema incompatible.

2.2. Si $m=1$: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$

Ampliamos ese menor: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ *rang(A) = 2 = rang($\overline{A}$) ; n = 3* $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

B.3.b) Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones y damos a *z* valor paramétrico:

$\left.\begin{matrix} x=1-2t \\ y=1-t \end{matrix}\right\}$. Soluciones: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$

Ejercicio 4.- Se consideran los puntos $A(0,-1,3)$, $B(2,3,-1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$.

(a) [1,25 puntos] Halla un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

(b) [1,25 puntos] Calcula los puntos de r que equidistan de los puntos A y B.

B.4.a) Tomamos un punto genérico de r: $C(-2+t, 2+2t, 3+3t)$

Imponemos la condición de perpendicularidad y despejamos:

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \rightarrow (2,4,-4)\cdot(-2+t, 3+2t, 3t) = 8-2t = 0 \rightarrow t=4 \rightarrow$ *C(2 , 10 , 15)*

B.4.b) Tomamos un punto genérico de r: $C(-2+t, 2+2t, 3+3t)$

Imponemos la condición de distancia y despejamos:

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \rightarrow \sqrt{(-2+t)^2+(3+2t)^2+(3t)^2} = \sqrt{(-4+t)^2+(-1+2t)^2+(4+3t)^2}$

$$(-2+t)^2+(3+2t)^2+(3t)^2 = (-4+t)^2+(-1+2t)^2+(4+3t)^2$$

$$14t^2+8t+13 = 14t^2+12t+33 \rightarrow 4t=-20 \rightarrow t=-5$$

Solo hay un punto $\rightarrow$ *C(–7 , –8 , –12)*