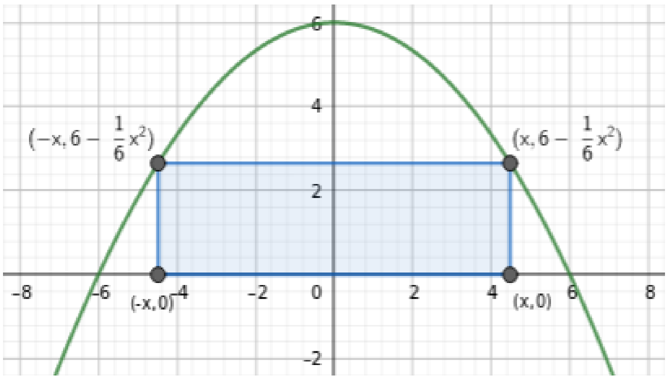
Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta $y = 0$.

A.1) Dibujamos la función. Es una parábola con las ramas hacia abajo

$$\textit{Vértice}: \ x=0 \ , \ y=6 \quad . \quad \textit{Cortes con los ejes}: \ y=0 \ , \ x=\pm 6$$

Dibujamos también el rectángulo y sacamos las coordenadas de sus vértices:



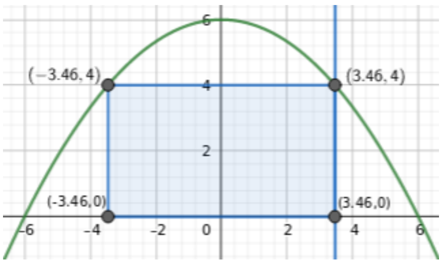
El área es $A(x) = base \cdot altura = 2x\left(6 - \frac{1}{6}x^2\right)$. Calculamos su máximo:

$$A(x) = 12x - \frac{1}{3}x^3 \ \rightarrow \ A'(x) = 12 - x^2 \ ; \ A' = 0 \ \rightarrow \ x = \pm\sqrt{12} \ .$$

Ignoramos la solución negativa.

$$A''(x) = -2x \ ; \ A''(\sqrt{12}) < 0 \ \rightarrow \ \textit{Máximo}$$

Las dimensiones son: *base* = $2\sqrt{12}$, *altura* = 4



Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 0)$.

A.2) Hay que hacer la integral de $f'(x)$

$$f(x)\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \ ; \ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^{\frac{-1}{2}}dx \ ; \ v = 2x^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 2\int x^{\frac{-1}{2}}dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x} + K$$

Imponemos el paso por el punto para calcular la constante:

$$f(1) = -4 + K \ \rightarrow \ K = 4 \quad . \quad f(x) = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x} + 4$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y+2z &= 0 \\ (m+2)x+y-z &= m \\ 3x+(m+2)y+z &= m \end{cases}$$

(a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.

A.3.a) Estudiamos los rangos de la matriz del sistema y de su matriz ampliada:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix}=2m^2+8m \quad . \quad |A|=0 \rightarrow m=0, m=-4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow r(A)\geq 2$$

1. Si $m\neq 0, m\neq -4$: *r(A) = r(A̅) = n = 3* → Sistema compatible determinado

2.1. Si $m=0$: *r(A) = 2* . Estudiamos la ampliada:

$$|\overline{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$. *r(A̅) = 2 , n = 3* → Sistema compatible indeterminado

2.2. Si $m=-4$: *r(A) = 2* . Estudiamos la ampliada:

$$|\overline{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$. *r(A̅) = 3* → Sistema incompatible

A.3.b) El sistema queda así: $\left.\begin{matrix} y+2z=-t \\ y-z=-2t \end{matrix}\right\}$; $x=t$; $y=\dfrac{\begin{vmatrix} -t & 2 \\ -2t & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\dfrac{-5t}{3}=$; $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -t \\ 1 & -2t \end{vmatrix}}{-3}=\dfrac{t}{3}$

Ejercicio 4.- Se consideran los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(1,-2,-1)$ y $\vec{w}=(2,\alpha,\beta)$, donde α y β son números reales.

(a) [0,75 puntos] Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(b) [0,75 puntos] Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

(c) [1 punto] Para $\alpha=8$, determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

A.4.a) $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{w}=0 \rightarrow 2\alpha+3\beta=-2 \\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0 \rightarrow -2\alpha-\beta=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-2 \end{cases}$

A.4.b) Sus coordenadas deben ser proporcionales: $\dfrac{2}{1}=\dfrac{\alpha}{-2}=\dfrac{\beta}{-1} \rightarrow \begin{cases} \alpha=-4 \\ \beta=-2 \end{cases}$

A.4.c) Los tres vectores están en el mismo plano: su determinante es *0* : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & \beta \end{vmatrix}=0$

$$40-4\beta=0 \rightarrow \beta=10$$

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}(x)+ax+b & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

B.1) Si es derivable, es continua y derivable en $x = 0$:

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\left(\dfrac{0}{0}\right)(L'Hopital)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=1 \end{cases} \quad ; b = 1$$

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x+a \quad , \quad si\, x\le 0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} \quad , \quad si\, x>0 \end{cases} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} f'(x)=\begin{cases} 1+a \quad , \quad si\, x\le 0 \\ \left(\dfrac{0}{0}\right)(L'Hopital)(*) \quad , \quad si\, x>0 \end{cases}$$

$$(*) f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right) \; (L'Hopital) \; =\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-2}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^2}}{2}=\frac{-1}{2}$$

$$1+a=\frac{-1}{2} \;\rightarrow\; a=\frac{-3}{2}$$

Ejercicio 2.- Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=xe^{-x^2}$.

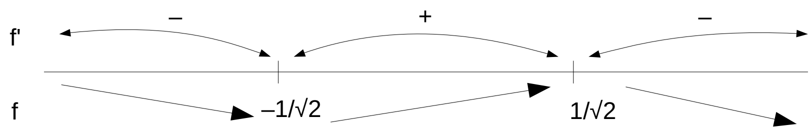
(a) [1,25 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1,25 puntos] Determina $a>0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0,a]$ y el eje de abscisas.

B.2.a) Corte en el eje Y: $x=0 \;\rightarrow\; y=0$

Cortes en el eje X: $y=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ e^{-x^2}=0 \;\rightarrow\; \nexists \end{cases}$. Solo tenemos un punto de corte: *(0 , 0)*

Extremos: Dom(f) = ℝ ; $f'(x)=e^{-x^2}-x\cdot 2x\cdot e^{-x^2}=(1-2x^2)e^{-x^2}$; $f'(x)=0 \;\rightarrow\; x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



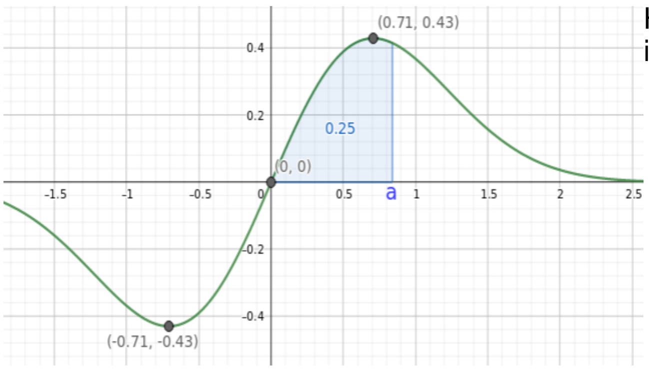
Máximo relativo en $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2e}}$. Mínimo relativo en $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$

Ejercicio 2.- Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=xe^{-x^2}$.

(a) [1,25 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1,25 puntos] Determina $a>0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0,a]$ y el eje de abscisas.

B.2.b)



Hacemos la integral indefinida y luego la definida, imponiendo un valor de ¼

$$\int (x e^{-x^2})dx=\left[\begin{array}{l} t=-x^2 \\ dt=-2x\,dx \end{array}\right]=\frac{-1}{2}\int e^t\,dt=\frac{-1}{2}e^{-x^2}+K$$

$$\int_0^a (x e^{-x^2})dx=\left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a=\frac{-1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{-1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \rightarrow -a^2=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2 \rightarrow a=\sqrt{\ln 2}$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

B.3)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=180 \\ x=\frac{1}{2}z \\ x+z=2y \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2}z+z=2y \rightarrow z=\frac{4}{3}y \rightarrow x=\frac{4}{6}y \rightarrow \frac{4}{6}y+y+\frac{4}{3}y=180 \rightarrow y=60 \begin{array}{l} \rightarrow z=80 \\ \rightarrow x=40 \end{array}$$

Ejercicio 4.- Considera las rectas $r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-k}{2}=\frac{z}{2}$ y $s\equiv\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$.

(a) [1,5 puntos] Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

(b) [1 punto] Para $k=1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

B.4.a) $r:\begin{cases}\vec{u}=(1,2,2)\\ A(2,k,0)\end{cases}$, $s:\begin{cases}\vec{v}=(-1,1,1)\\ B(-1,1,3)\end{cases}$. Se debe cumplir: $rang(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})=2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1-k & 3 \end{vmatrix}=3-6-2+2k+6+6-1+k=3k+6=0 \rightarrow k=-2$$

B.4.b) $\pi:\begin{cases}A(2,1,0)\\ \vec{u}=(1,2,2)\\ \vec{v}=(-1,1,1)\end{cases}$, $\pi:\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0(x-2)-3(y-1)+3z=-3y+3z+3=0$

$$\pi:-y+z+1=0$$