SOLUCIONES

Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**

Examen Junio Suplente. Año 2019

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^{-2x}-2x}{\operatorname{sen}^2(x)}$

A.1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-2x}-2x}{sen^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)\ (L'Hopital)\ =\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x+2e^{-2x}-2}{2\,sen\,x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)\ (L'Hopital)\ =$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-4e^{-2x}}{2\cos^2 x-2\,sen^2 x}=\frac{-5}{2}$

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\displaystyle\int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

A.2)

$$\int \ln\frac{x^2+1}{x}\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\ln\dfrac{x^2+1}{x}\ ;\ du=\dfrac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}}\,dx=\dfrac{x(x^2-1)}{x^2(x^2+1)}\,dx=\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx \\ dv=dx\ ;\ v=x \end{array}\right]=$$

$$=(\ln\frac{x^2+1}{x})\cdot x-\int x\,\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx=(\ln\frac{x^2+1}{x})\cdot x-\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx=(\ln\frac{x^2+1}{x})\cdot x-I_1$$

$$I_1=\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx=\left[\begin{array}{l}\text{integral racional}\\ \text{se hace la división}\end{array}\right]=\int(1-\frac{2}{x^2+1})\,dx=x-2\,arc\,tg\,x$$

$$I=(\ln\frac{x^2+1}{x})\cdot x-x+2\,arc\,tg\,x+K$$

Ejercicio 3.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & m & 1\\ m-1 & m & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Calcula los valores de m para los cuales A tiene inversa.

(b) [1,5 puntos] Para $m=2$, encuentra la matriz X que cumple $AX-BB^t=I$, siendo B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

A.3.a) El determinante debe ser distinto de 0

$|A|=-m^2+2m-1\ ;\ |A|=0\ \rightarrow\ m=1$. La matriz tiene inversa si $m\neq 1$.

A.3.b) $X=A^{-1}(I+BB^t)$

m1 = Inversa(A)

$\rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

m2 = I + B Traspone(B)

$\rightarrow\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

X = Inversa(A) (I + B Traspone(B))

$\rightarrow\begin{pmatrix}-6 & 1 & 6\\ 4 & 2 & -3\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Considera el punto $A(2,1,0)$ y los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=0$ y $\pi_2 \equiv x-y+z=0$.

(a) [1,25 puntos] Calcula la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y a π_2.

(b) [1,25 puntos] Calcula los puntos de la recta $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{2}$ que equidistan de π_1 y π_2.

A.4.a) Si la recta es paralela a los planos, debe ser perpendicular a sus vectores normales. Al hacer el producto vectorial se obtiene un vector perpendicular a los dos normales

$$\vec{n}_1=(1,1,1) \quad , \quad \vec{n}_2=(1,-1,1) \quad ; \quad \vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(2,\,0,\,-2)$$

La recta pedida es: $r:\begin{cases} A(2,1,0) \\ \vec{n}_1\times\vec{n}_2=(2\,,\,0\,,\,-2) \end{cases} \quad ; \quad r:\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=1 \\ z=-2\lambda \end{cases}$

A.2.b) Tomamos un punto genérico de s : $P(1+2t\,,2+3t\,,0+2t)$

Hacemos las distancias e igualamos: $\dfrac{|1+2t+2+3t+2t|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|1+2t-2-3t+2t|}{\sqrt{3}}$

$$|3+7t|=|-1+t| \quad ; \quad \begin{cases} 3+7t=-1+t \;\rightarrow\; t=\dfrac{-2}{3} \\ 3+7t=1-t \;\rightarrow\; t=\dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

Los puntos son $P_1\left(\dfrac{-1}{3},0,-\dfrac{4}{3}\right)$ y $P_2\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4},-\dfrac{1}{2}\right)$

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se sabe que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

B.1) La función debe ser continua en 0:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \left(\dfrac{0}{0}\right) \quad (L'Hopital) \quad = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1 \end{array}\right\} \to b = \frac{1}{2}$$

La función debe ser derivable en 0:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - a \;, & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{\frac{1}{x+1}x - \ln(x+1)}{x^2} \;, & si \quad x > 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} f'(0^-) = -a \\ f'(0^+) = \left(\dfrac{0}{0}\right) \quad (L'Hopital) \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \quad (L'Hopital) \quad = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2}}{2} = \frac{-1}{2} \qquad \to \quad a = \frac{1}{2}$$

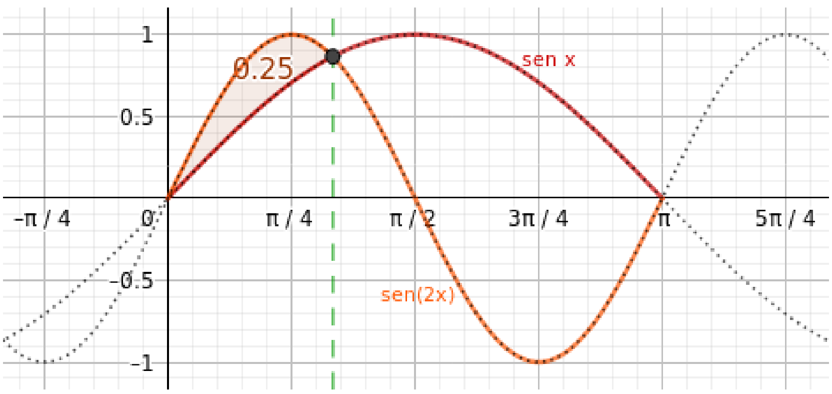
Ejercicio 2.- Sean las funciones $f, g\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$.

(a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{3}$.

B.2.a) Para esbozar la gráfica debemos conocer la forma de la función seno y hacer una tabla de valores

x°	x rad	sen x	sen(2x)
0	0	0	0
45	π/4	0,7	1
90	π/2	1	0
135	3π/4	0,7	-1
180	π	0	0



Puntos de corte:

$$sen\,x = sen(2x) \to sen\,x = 2\,sen\,x \cos x \to sen\,x - 2\,sen\,x\cos x = 0 \to sen\,x(1 - 2\cos x = 0)$$

$$\begin{cases} sen\,x = 0 \to x = 0 \;, \; \pi \\ 1 - 2\cos x = 0 \to \cos x = \dfrac{1}{2} \to x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

B.2.b) $\int (sen(2x)-sen\,x)dx=\int sen(2x)dx-\int sen\,x\,dx=\frac{1}{2}\int 2sen(2x)dx+\cos x=\frac{-1}{2}\cos(2x)+\cos x+K$

Área = $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(sen(2x)-sen\,x)dx=\left[\frac{-1}{2}\cos(2x)+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4}\ u^2$

Ejercicio 3.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx-y+13z &= 0\\ 2x-my+4z &= 0\\ x+y+7z &= 0\end{cases}$$

(a) [1,5 puntos] Encuentra los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para $m=3$. En este caso, ¿hay alguna solución en la que $x=10$? Razona tu respuesta.

B.3.a) Es un sistema homogéneo, siempre es compatible. Será indeterminado cuando el rango de la matriz no sea 3, o sea, cuando su determinante valga 0.

$|A|=-7m^2+9m+36$; $|A|=0$ → $m=\frac{-12}{7}$, 3

B.3.b) $A=\begin{pmatrix}3&-1&13\\2&-3&4\\1&1&7\end{pmatrix}$ Elegimos un menor que no sea 0: $\begin{vmatrix}3&-1\\2&-3\end{vmatrix}=-7$. El sistema queda:

$\begin{cases}3x-y=-13t\\2x-3y=-4t\end{cases}$; $x=\frac{\begin{vmatrix}-13t&-1\\-4t&-3\end{vmatrix}}{-7}=-5t$; $y=\frac{\begin{vmatrix}3&-13t\\2&-4t\end{vmatrix}}{-7}=-2t$; $z=t$

$x=10?$ → $t=-2$ → $(10\ ,\ 4´,´-2)$

Ejercicio 4.- Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,a)$ y el plano π de ecuación $x-y+z=0$.

(a) [0,75 puntos] Determina a sabiendo que la recta que pasa por A y por B es paralela al plano π.

(b) [0,75 puntos] Halla el punto de corte del plano π con la recta que pasa por A y es perpendicular a dicho plano.

(c) [1 punto] Para $a=2$, halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π.

B.4.a) El vector director de esa recta puede ser: $\vec{AB}=(0,-2,a+1)$

Ese vector debe ser perpendicular al normal del plano:

$$\vec{AB}\perp\vec{n} \rightarrow (0,-2,a+1)\cdot(1,-1,1)=0 \rightarrow a=-3$$

B.4.b) Esta recta la construímos con el punto A y el vector normal al plano:

$r:\begin{cases} x=0+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$. Tomamos un punto genérico y lo sustitímos en el plano:

$(0+\lambda)-(3-\lambda)+(-1+\lambda)=0 \rightarrow \lambda=\frac{4}{3}$. El punto es $P(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3})$

B.4.c) Este plano lo construímos con el punto A , y los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{n}$

$$\alpha:\begin{cases} x=0+0\lambda+\mu \\ y=3-2\lambda-\mu \\ z=-1+3\lambda+\mu \end{cases} = \begin{cases} x=\mu \\ y=3-2\lambda-\mu \\ z=-1+3\lambda+\mu \end{cases}$$