SOLUCIONES

Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**

Examen Junio Reserva. Año 2019

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- Según un determinado modelo, la concentración en sangre de cierto medicamento viene dada por la función $C(t) = te^{-t/2}$ mg/ml, siendo t el tiempo en horas transcurridas desde que se le administra el medicamento al enfermo.

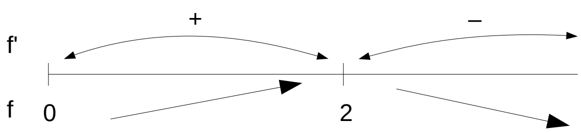
(a) [2 puntos] Determina, si existe, el valor máximo absoluto de la función y en qué momento se alcanza.

(b) [0,5 puntos] Sabiendo que la máxima concentración sin peligro para el paciente es 1 mg/ml, señala si en algún momento del tratamiento hay riesgo para el paciente.

A.1.a) Suponemos que el dominio de la función es $[0,+\infty)$. Tenemos un producto de una polinómica y una exponencial. Son funciones continuas y derivables. No tiene asíntotas verticales.

Estudiamos la derivada: $C'(t)=e^{\frac{-t}{2}}-t\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{-t}{2}}=(1-\frac{t}{2})e^{\frac{-t}{2}}$. Igualamos a 0 y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} 1-\frac{t}{2}=0 \rightarrow t=2 \\ e^{\frac{-t}{2}}=0 \rightarrow x=\nexists \end{cases}$$



Tenemos un máximo absoluto en *t = 2* , *C(2) = 2/e ≃ 0,74*

La concentración alcanza el máximo absoluto a las dos horas con un valor de 0,74 mg/ml

A.1.b) No, el valor máximo al que se llega es 0,74 mg/ml.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Dado un número real $a > 0$, considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - ax$, y la recta $y = 2ax$. Determina a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta anterior es 36.

A.2) Calculamos los puntos de corte entre las funciones: $x^2-ax=2ax \rightarrow x(x-3a)=0 \rightarrow x=0\ ,\ x=3a$

Hacemos la integral para el área e igualamos a *36*:

$$A=\left|\int_0^{3a}(x^2-ax-2ax)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}-a\,x^2\right]_0^{3a}\right|=\left|27\frac{a^3}{3}-9\frac{a^3}{2}-9a^3-0\right|=\frac{9a^3}{2}$$

$$\frac{9a^3}{2}=36 \rightarrow a=2$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple $AX = (A^{-1}A^t + I)^2$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz identidad de orden 3.

A.3) $X=A^{-1}(A^{-1}A^t+I)^2$

m1 = Inversa(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

m2 = m1 Traspone(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

m3 = (m2 + I)^2

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

X = m1 m3

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2 & = & 0 \\ -y+z+5 & = & 0 \end{array} \right.$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-mz=1$.

(a) [1,25 puntos] Calcula m sabiendo que r y π son paralelos.

(b) [1,25 puntos] Para $m=-1$, calcula la distancia entre r y π.

A.4.a) El sistema formado por las tres ecuaciones debe ser compatible indeterminado: r(A) = 2 , r($\overline{A}$) = 3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \end{pmatrix} \quad ; \quad |A|=m+1 \rightarrow m+1=0 \rightarrow m=-1 \quad ;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad |\overline{A}|=-8$$

O sea, si *m = -1* : *r(A) = 2* , *r($\overline{A}$) = 3* . Sistema compatible indeterminado; la recta y el plano no tienen puntos en común, son paralelos.

A.4.b) Como son paralelos, tomamos un punto cualquiera de *r* y calculamos la distancia al plano.

Punto de la recta: *x = –1 , y = –1 , z = –6 : P(–1, –1, –6)*

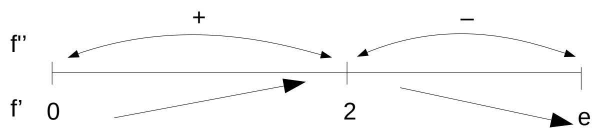
$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|-2-1-6-1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{10}{\sqrt{6}} \quad u$$

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada $f:(1,e)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x)$ (ln denota la función logaritmo neperiano), determina la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente máxima.

B.1.a) La pendiente de la recta tangente es la derivada de *f* . Entonces habrá que buscar el máximo de la derivada:

$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$. Buscamos el máximo de esta función. Hacemos su derivada e igualamos a *0* :

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}=0 \rightarrow 2-x=0 \rightarrow x=2$$



El máximo está en *x = 2* . Ahí hay que hacer la recta tangente:

$$t: \quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(2)=\frac{1}{4} \quad ; \quad f(2)=\frac{1}{2}+\ln 2$$

$$t: \quad y=\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2}+\ln 2 \quad ; \quad y=\frac{1}{4}x+\ln 2$$

Ejercicio 2.- Sea $f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\rightarrow\mathbb{R}$ una función continua y sea F la primitiva de f que cumple $F(0)=\frac{\pi}{3}$ y $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pi$. Calcula:

(a) [1 punto] $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(3f(x)-\cos(x))\,dx$

(b) [1,5 puntos] $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\operatorname{sen}(F(x))f(x)\,dx$

B.2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(3f(x)-\cos x)\,dx=[3F(x)-sen\,x]_0^{\frac{\pi}{6}}=3\pi-\frac{1}{2}-3\frac{\pi}{3}+0=2\pi-\frac{1}{2}$

B.2.b) Cambio de variable:

$$\int sen(F(x))f(x)dx=\begin{bmatrix}t=F(x)\\ dt=F'(x)dx=f(x)dx\end{bmatrix}=\int sen\,t\,dt=-\cos t=-\cos(F(x))$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen(F(x))f(x)\,dx=[-\cos(F(x))]_0^{\frac{\pi}{6}}=+1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\lambda y+z &=& 4\\ -\lambda x+y+z &=& 1\\ x+y+z &=& \lambda+3\end{array}\right.$$

(a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para $\lambda=1$.

B.3.a) Estudiamos los rangos de la matriz del sistema y de la ampliada:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&\lambda&1\\-\lambda&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\lambda^2-1\quad;\quad |A|=0\ \rightarrow\ \lambda=\pm1$$

1. Si $\lambda\neq\pm1$: r(A) = 3 , r($\overline{A}$) = 3 , n = 3 → Sistema compatible determinado

2.1. Si $\lambda=+1$:

$\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2\neq0$ → r(A) = 2 . Estudiamos la ampliada: $|\overline{A}|=\begin{vmatrix}1&1&4\\-1&1&1\\1&1&4\end{vmatrix}=0$ → r($\overline{A}$) = 2

Sistema compatible indeterminado

2.2. Si $\lambda=-1$:

$\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2\neq0$ → r(A) = 2 . Estudiamos la ampliada: $|\overline{A}|=\begin{vmatrix}1&-1&4\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}\neq0$ → r($\overline{A}$) = 3

Sistema incompatible.

B.3.b) Según el estudio anterior, el sistema queda: $\left.\begin{matrix} x+y=4-t \\ -x+y=1-t \end{matrix}\right\}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4-t & 1 \\ 1-t & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{3}{2} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-t \\ -1 & 1-t \end{vmatrix}}{2}=\frac{5}{2}-t \quad ; \quad z=t$$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Halla cada uno de los puntos de la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array}\right.$ de manera que junto con los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,1)$ formen un tetraedro de volumen $\frac{5}{6}$.

B.4) Un tetraedro tiene cuatro vértices. Tenemos tres, y el cuarto pertenece a la recta. Tomamos un punto genérico de r:

$P(t,t,t)$. Hacemos los vectores desde el punto A y calculamos el volumen del tetraedro:

$$V=\left\|\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ t-1 & t-1 & t \end{matrix}\right\|=|-t+1-t+1-t|=|-3t+2| \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} -3t+2=\frac{5}{6} \rightarrow t=\frac{7}{18} \\ -3t+2=\frac{-5}{6} \rightarrow t=\frac{17}{18} \end{array}\right.$$

Los puntos pedidos son: $P_1(\frac{7}{18},\frac{7}{18},\frac{7}{18})$, $P_2(\frac{17}{18},\frac{17}{18},\frac{17}{18})$