Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad \text{para} \quad x \neq -1.$$

(a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

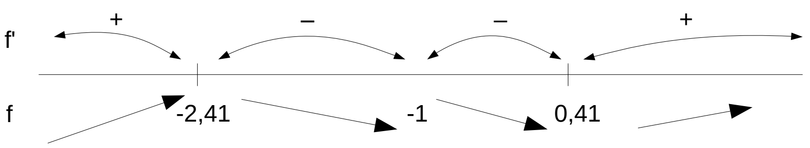
A.1.a) Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. No hay horizontales

Asíntotas oblícuas: $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$; $n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x+1}=1$

Asíntota oblícua: $y=\frac{1}{2}x+1$

Asíntota vertical: $\lim_{x\to-1} f(x)=\left(\frac{2}{0}\right)=\pm\infty$. Asíntota vertical: $x=-1$

A.1.b) $f'(x)=\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}$; $f'(x)=0 \rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}\simeq 0{,}41$; $-2{,}41$



Creciente en $(-\infty,-1-\sqrt{2})$

Decreciente en $(-1-\sqrt{2},-1)$

Decreciente en $(-1,-1+\sqrt{2})$

Creciente en $(-1+\sqrt{2},+\infty)$

Ejercicio 2.- **[2,5 puntos]** Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$).

A.2) $\left[t=e^x \;;\; dt=e^x dx=t\,dx \;;\; \frac{dt}{t}=dx\right]$; $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t}=\int\frac{1+t}{(1-t)t}dt$

Tenemos una integral racional:

$\frac{1+t}{(1-t)t}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{t}$; $1+t=At+(1-t)B$; damos valores a t y se obtiene $A=2;B=1$

$$F(x)=\int\frac{1+t}{(1-t)t}dt=\int\left(\frac{2}{1-t}+\frac{1}{t}\right)dt=-2\ln|1-t|+\ln|t|=-2\ln|1-e^x|+\ln|e^x|+K \quad :$$

Terminamos imponiendo que pase por *(1 , 1)*: $F(1)=-2\ln|1-e|+\ln e+K=-2\ln|1-e|+1+K=1$; $K=2\ln|1-e|$

Por tanto, tenemos $F(x)=-2\ln|1-e^x|+\ln|e^x|+2\ln|1-e|$

Se puede simplificar el resultado a $F(x)=-2\ln|1-e^x|+x+2\ln(e-1)$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A.3) Tenemos que $a+d=1$ y que $ad-bc=1$.

Veamos la tercera condición: $AX=\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$; $XA=\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$.

O sea : $\begin{cases} a+d=1 \\ ad-bc=1 \\ b=-c \\ a=d \end{cases}$. Despejando se obtiene: $a=d=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-bc=1$; $bc=\frac{-3}{4}$; $-b^2=\frac{-3}{4}$

$$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; c=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tenemos dos soluciones: $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

(a) [1,25 puntos] Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

(b) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

A.4.a) Tomamos un punto genérico de la recta e imponemos la equidistancia:

$$P(2-t,2+3t,1+t)$$

$d(P,\pi_1)=\frac{|2-t|}{\sqrt{1}}$; $d(P,\pi_2)=\frac{|2+3t|}{\sqrt{1}}$; $|2-t|=|2+3t|$; $\begin{cases} 2-t=2+3t \\ 2-t=-2-3t \end{cases}$; $\begin{cases} t=0 \\ t=-2 \end{cases}$

Tenemos por tanto dos soluciones: $P_1(2,2,1)$ y $P_2(4,-4,-1)$

A.4.b) $r:\begin{cases} A(-1,3,1) \\ \vec{v}=(2,2,1) \end{cases}$; $s:\begin{cases} B(0,0,0) \\ \vec{u}=(0,0,1) \end{cases}$. Estudiamos los rangos de los vectores:

$rang(\vec{v},\vec{u})=2$. Rectas no paralelas

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$. Por tanto, $rang(\vec{v},\vec{u},\overrightarrow{AB})=3$. Las rectas se cruzan

---

Ejercicio 1.- Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-a)e^x$.

(a) [1,25 puntos] Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.

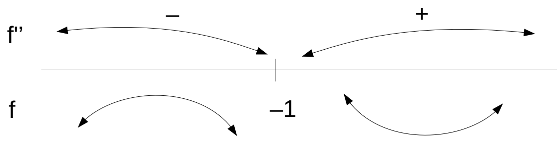
(b) [1,25 puntos] Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

B.1.a) Punto crítico en *x = 0*: $f'(0)=0 \rightarrow f'(x)=e^x+(x-a)e^x$

$f'(0)=1-a \rightarrow 1-a=0 \rightarrow a=1$

B.1.b) $Dom(f)=\mathbb{R}$

$f''(x)=e^x+e^x+(x-1)e^x \rightarrow f''(x)=0 \rightarrow (x-1)e^x=-2e^x \rightarrow x-1=-2 \rightarrow x=-1$



La función tiene un punto de inflexión en *x = – 1*

$f(-1)=-2e^{-1}$. El punto es $(-1\ ,\ -2e^{-1})$

Ejercicio 2.- Considera la funciones $f\colon (-2,+\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

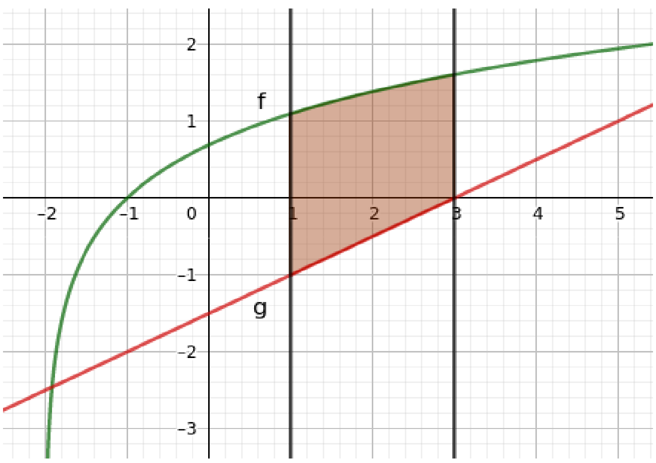
(a) [1 punto] Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

(b) [1,5 puntos] Determina el área del recinto anterior.

B.2.a) La primera es un logaritmo cuyo dominio es : $(-2,+\infty)$. La segunda es una recta

$f(1)=1.1\ ,\ f(3)=1.61$
$g(1)=-1\ ,\ g(3)=0$

Con estos valores ya se puede hacer la gráfica



B.2.b) Hacemos las dos integrales:

$$I_1=\int \ln(x+2)dx=\left[\begin{matrix} u=\ln(x+2) \;\; ; \;\; du=\dfrac{1}{x+2}dx \\ dv=dx \;\; ; \;\; v=x \end{matrix}\right]=x\cdot\ln(x+2)-\int \frac{x}{x+2}dx$$

Ahora tenemos una racional , hay que hacer la división

$$I_{11}=\int \frac{x}{x+2}dx=\int (1-\frac{2}{x+2})dx=x-2\ln|x+2| \quad \cdot \quad I_1=x\cdot ln(x+2)-x+2\ln|x+2|$$

$$I_2=\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-3x)$$

Calculamos el área:

$$A=\int_1^3 (f-g)dx=3\ln(5)-3+2\ln(5)-\frac{1}{2}(\frac{9}{2}-9)-\ln(3)+1-2\ln(3)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-3)=3{,}75u^2$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$,

considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA=B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

B.3) Hacemos la multiplicación de las matrices para que se vea bien el sistema, aunque no es necesario, ya que los rangos de las matrices no varían con las traspuestas:

$$(X^tA)_{1\times 3}=\left((2-m)x+y+mz \quad x+my+z \quad (2m-1)x+y+z\right) \;\; ; \;\; B^t_{1\times 3}=\left(2m^2-1 \quad m \quad 1\right)$$

$$\left.\begin{matrix} (2-m)x+y+mz=2m^2-1 \\ x+my+z=m \\ (2m-1)x+y+z=1 \end{matrix}\right\}$$ Estudiamos los rangos de la matriz del sistema y la ampliada:

$$\mathbf{A_t} := \begin{pmatrix} -m+2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A^t|=-2m^3+6m-4$$

Se iguala a *0* y determinante y se resuelve por Ruffini, obteniéndose *m = –2 , 1*

Por tanto tenemos:

1. Si *m ≠ –2* y *m ≠ 1* , ran(A$_t$) = ran ($\overline{A}_t$) = n = 3 . Sistema compatible determinado

2.1. Si m = –2

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$. Ampliamos este menor

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$. ran(A$_t$) = 2 ; ran ($\overline{A}_t$) = n = 3. Sistema incompatible

2.2. Si m = 1 : La matriz del sistema y la ampliada queda así: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ran(A$_t$) = 1 = ran ($\overline{A}_t$) ; n = 3. Sistema compatible indeterminado. Dos valores paramétricos.

Ejercicio 4.- Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

(a) [1,25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

(b) [1,25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

B.4.a) $\overrightarrow{AB}=(0,-1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,1,1)$

Hacemos el producto vectorial: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-3,-2,-1)$

El área del triángulo es: $\frac{1}{2}|(-3,-2,1)|=\frac{\sqrt{14}}{2}u^2$

B.4.b) Usamos esta fórmula: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

$$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}$$