Una granja elabora una dieta mezclando dos tipos de pienso A y B. El pienso A aporta 2 unidades de Calcio y 1 de Hierro por cada kilogramo, mientras que el B aporta 1 de Calcio y 2 de Hierro. El coste por kilogramo tanto del pienso A como del pienso B es 1 euro por kilogramo. La dieta deberá aportar al menos 2 unidades de Calcio y 2 de Hierro.
Determine los kilogramos que se han de mezclar de cada tipo de pienso para que el coste de la dieta sea mínimo. ¿Cuál sería dicho coste? ¿Cuántas unidades de Hierro y de Calcio se administrarían a los animales con esta dieta?

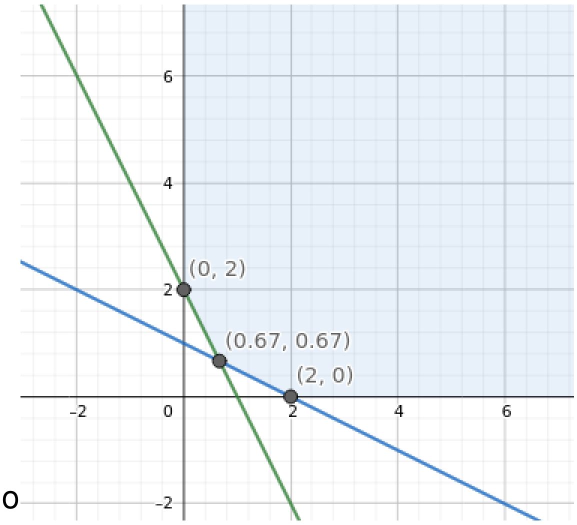
A.1.a) x: *kg tipo A* , y: *kg tipo B*

Calcio: $2x+y\geq 2$

Hierro: $x+2y\geq 2$

$x\geq 0 \quad ; \quad y\geq 0$

Coste: $C(x,y)=x+y$



Calculamos el coste en los vértices:

$$C(0,2)=2 \quad ; \quad C\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\simeq 1{,}33 \quad ; \quad C(2,0)=2$$

El coste es mínimo mezclando ⅔ kg de cada clase.

Este coste sería de aproximadamente 1,33 €.

Los animales estarían tomando 2 unidades de calcio y 2 de hierro, las cantidades mínimas exigidas.

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si } -2\leq x<1 \\ ax^2+4x & \text{si } 1\leq x\leq 4 \end{cases}$

a) **(0.5 puntos)** Calcule el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio.

b) **(0.5 puntos)** Para $a=-1$, compruebe si es derivable en $x=1$.

c) **(0.75 puntos)** Para $a=-1$, determine los extremos relativos de la función y el valor de la función en dichos extremos.

d) **(0.75 puntos)** Para $a=-1$, represente gráficamente la función en su dominio.

A.2.a) Los dos trozos son polinomios. Solo hay que estudiar *x = 1* :

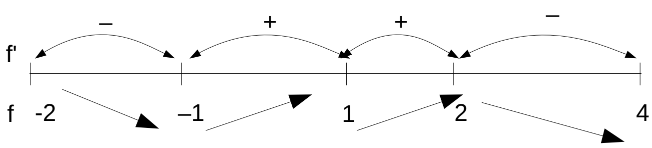
$$\begin{matrix} f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=a+4 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=3 \end{matrix}$$

. La función será continua si $a+4=3 \rightarrow a=-1$

A.2.b) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x \ , & si \ \ -2\leq x<1 \\ -x^2+4x \ , & si \ \ 1\leq x\leq 4 \end{cases}$; $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 \ , & si \ \ -2\leq x<1 \\ -2x+4 \ , & si \ \ 1<x\leq 4 \end{cases}$; $\begin{matrix} f'(1^-)=4 \\ f'(1^+)=2 \end{matrix}$

No es derivable en *x = 1*

A.2.c) $f'(x)=0 \rightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \rightarrow x=-1 \\ -2x+4=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$

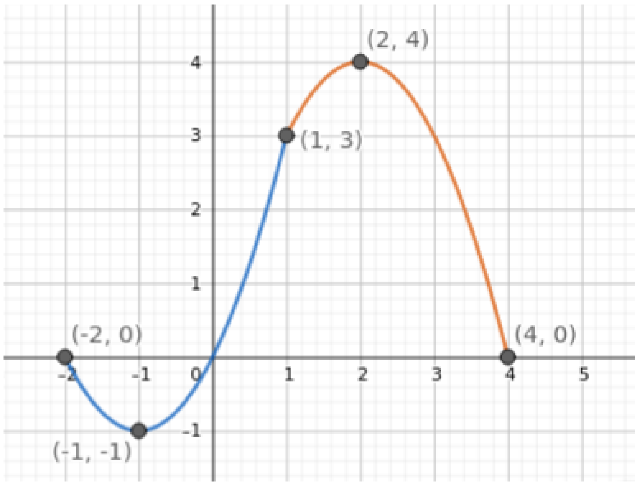


Máximo relativo en *x = –2* , *f(–2) = 0*

Mínimo relativo en *x = –1* , *f(–1) = –1* . Máximo relativo en *x = 2* , *f(2) = 4*

Mínimo relativo en *x = 4* , *f(4) = 0*

A.2.c) Con los puntos que ya hemos calculado y teneniendo en cuenta que los dos trozos son parábolas, podemos hacer la gráfica.



En una localidad andaluza hay tres institutos de ESO. De los 500 estudiantes que cursan 1º de ESO en dicha localidad, 250 están matriculados en el instituto A, 150 en el B y el resto están matriculados en el instituto C. Se sabe que han superado la materia de Matemáticas el 70 % del alumnado de 1º de ESO matriculado en el instituto A, el 68 % de B y el 73 % de C. Se elige al azar un estudiante de 1º de ESO de la citada localidad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que no haya superado Matemáticas.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que esté matriculado en el instituto A, sabiendo que ha superado Matemáticas.

c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que esté matriculado en el instituto C y no haya superado Matemáticas.

A.3)

	A	B	C	
M	175	102	73	350
M'	75	48	27	150
	250	150	100	500

a) $p(M')=\frac{150}{500}=0{,}3$

b) $p(A/M)=\frac{p(A\cap M)}{p(M)}=\frac{175}{350}=0{,}5$

c) $p(C\cap M')=\frac{27}{500}=0{,}054$

A la salida de una heladería se realizó una encuesta para comprobar si los clientes habían probado un nuevo sabor en promoción. Se observó que de 125 personas encuestadas, 20 no lo habían probado y el resto sí.

a) **(1.5 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 97 %, un intervalo para estimar la proporción de clientes de esa heladería que no habían probado el nuevo helado.

b) **(1 punto)** Mediante una nueva muestra se desea estimar la proporción de clientes de esa heladería que no habían probado el nuevo helado, con un error inferior al 5 % y un nivel de confianza del 94 %. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral del apartado anterior, ¿qué tamaño mínimo debe tener dicha muestra?

A.4.a)

$$P[Z \le z_{\alpha/2}] = \frac{1+p}{2} = \frac{1+0{,}97}{2} = 0{,}985 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2{,}17 \qquad ; \qquad \overline{p} = \frac{20}{125} = 0{,}16$$

Int. de confianza para la proporción: $\left(\overline{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\ ,\ \overline{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right) = (0{,}0888\ ;\ 0{,}2312)$

A.4.b) $P[Z \le z_{\alpha/2}] = \frac{1+p}{2} = \frac{1+0{,}94}{2} = 0{,}97 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1{,}88$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \quad ; \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \overline{p}(1-\overline{p}) = 190{,}17\ ;$ La muestra debe ser de al menos 191 clientes

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) **(2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $A^4 \cdot X = B^2 + I_2$.

b) **(0.5 puntos)** ¿Tiene inversa la matriz C? Justifique la respuesta.

B.1.a) $X = (A^4)^{-1} \cdot (B^2 + I)$

$\mathrm{m1} = A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{m2} = (A^2)^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{m3} = \mathrm{Inversa}\left((A^2)^2\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{m4} = B^2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{m5} = B^2 + I \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad X = \mathrm{Inversa}(A^4)\ (B^2 + I) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

B.1.b) No, porque su determinante vale *0*

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2+4x+1 & \text{si } x<0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) **(1 punto)** Dada la función $g(x) = x^3 + bx^2 + c$, calcule los valores de b y c sabiendo que g tiene un extremo relativo en $x = -1$ y que su gráfica pasa por el punto $(-1,\ 3)$.

B.2.a) $Dom(f)=\mathbb{R}$. El primer trozo es un polinomio y el segundo una exponencial. Son funciones continuas y derivables. Solo tenemos que estudiar en *x = 0*

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1 \end{array}\right.$$

. La función es continua en *x = 0*. La función es continua en $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+4 & , \ si \ \ x<0 \\ -e^{-x} & , \ si \ \ x>0 \end{cases} \ ; \ \begin{array}{l} f'(0^-)=4 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}$$

. La función no es derivable en *x = 0*.

Es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

B.2.b) $g'(x)=3x^2+2bx$

Extremo relativo en *x = –1* → $g'(-1)=0 \rightarrow 3-2b=0 \rightarrow b=\dfrac{3}{2}$

Pasa por *(–1 , 3)* → $g(-1)=3 \rightarrow -1+\dfrac{3}{2}+c=3 \rightarrow c=\dfrac{5}{2}$

El 70 % de los taxistas de una ciudad tiene 40 años o más y de estos, el 60 % es propietario de la licencia del vehículo. Sin embargo, en el caso de los menores de 40 años, son propietarios de la licencia el 23 %. Se escoge al azar un taxista de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que sea propietario de la licencia del vehículo.

b) **(1 punto)** Sabiendo que no es propietario de la licencia, calcule la probabilidad de que tenga 40 años o más.

c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea propietario de la licencia o tenga menos de 40 años.

B.3.a)

	Ma	Me	
L	42	6,9	48,9
L’	28	23,1	51,1
	70	30	100

60% de 70 = 42 ; 23% de 30 = 6,9

a) $p(L)=0{,}489$

b) $p(Ma/L')=\dfrac{p(Ma\cap L')}{p(L')}=\dfrac{0{,}28}{0{,}511}=0{,}5479$

c) $p(L\cup Me)=1-p(L'\cap Me')=1-0{,}28=0{,}72$

La vida útil de los filtros de las máquinas de agua por ósmosis se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica de 2 000 horas. En una prueba realizada en 9 máquinas elegidas al azar, se obtuvieron los siguientes resultados:

9 500 10 000 8 500 10 500 16 500 10 000 12 000 14 000 17 000

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 99 % para la vida útil media de los filtros de las máquinas.

b) **(1 punto)** ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo que debería tener una muestra, para que el error cometido en la estimación de la vida útil media de los filtros sea inferior a 500 horas, con un nivel de confianza del 95 %?

B.4.a) $\bar{x}=\frac{9500+10000+\ldots}{9}=12000$; $p(z\leq z_{\alpha/2})=\frac{1+0,99}{2}$; $z_{\alpha/2}=2,575$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(10282,78\ ;\ 13717,22)$

B.4.b) $p(z\leq z_{\alpha/2})=\frac{1+0,95}{2}$; $z_{\alpha/2}=1,96$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=61,46$; La muestra debe ser de al menos 62 máquinas