(2.5 puntos) Se quiere elaborar dos suplementos alimenticios UNAL y DOSAL con idea de completar la dieta de ciertos individuos. Cada comprimido de UNAL aporta 5 unidades de calcio, 5 de proteínas y 1 caloría y tiene un coste 0.6 euros, mientras que un comprimido de DOSAL aporta 2 unidades de calcio, 5 de proteínas y 3 calorías, siendo su coste de 1 euro. Sabiendo que los mínimos diarios requeridos son 10 unidades de calcio, 20 de proteínas y 6 calorías, encuentre la combinación de comprimidos de los dos suplementos que satisfacen las necesidades diarias con el menor coste.

A.1) x: *nº comprimidos UNAL* ; y: *nº comprimidos DOSAL*

calcio: $5x+2y\geq 10$

proteínas: $5x+5y\geq 20$

calorías: $x+3y\geq 6$

$x\geq 0 \quad ; \quad y\geq 0$

Coste: $C(x,y)=0{,}6x+y$

$C(0,5)=5$

$C(\frac{2}{3},\frac{10}{3})=\frac{56}{15}\simeq 3{,}73$

$C(3,1)=2{,}8$

$C(6,0)=3{,}6$

La mejor combinación es tomar 3 comprimidos de UNAL y 1 de DOSAL. El coste diario sería de 2,8 €.

Se considera la función $f(x)=x-\dfrac{3x-1}{x+1}$.

a) **(1 punto)** Indique el dominio de f y calcule $f'(x)$.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\dfrac{2}{3}$.

c) **(1 punto)** Halle los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a dicha gráfica es horizontal.

A.2.a) Es un polinomio, cuyo dominio es ℝ , y una racional. En esta última hay que estudiar el denominador:

$x+1=0 \rightarrow x=-1$. Por tanto, $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

$$f'(x)=1-\frac{3(x+1)-(3x-1)}{(x+1)^2}$$

A.2.b) $$f'(\frac{2}{3})=1-\frac{3(\frac{2}{3}+1)-(3\cdot\frac{2}{3}-1)}{(\frac{2}{3}+1)^2}=1-\frac{4}{(\frac{25}{9})}=1-\frac{36}{25}=-\frac{11}{25}$$

A.2.c) $$f'(x)=0 \rightarrow 1-\frac{3(x+1)-(3x-1)}{(x+1)^2}=0 \rightarrow (x+1)^2=3(x+1)-(3x-1)$$

$$\rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow x=-3, x=1$$

$f(-3)=-8$, $f(1)=0$. Los puntos son *(–3 , –8)* y *(1 , 0)*

Para tratar cierta enfermedad, en un hospital se utilizan tres fármacos distintos, A, B y C, administrándose a cada enfermo un solo fármaco. El 30 % de los pacientes es tratado con el fármaco A, el 50 % es tratado con el B y el resto con el fármaco C. La probabilidad de que la enfermedad se cure con el fármaco A es de 0.6, de que se cure con el fármaco B es de 0.8 y de que se cure con el fármaco C es de 0.7. Se elige al azar un paciente de ese hospital con esa enfermedad.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que el paciente se cure.

b) **(1 punto)** Sabiendo que el paciente se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido tratado con el fármaco A?

A.3.a) E: que la enfermedad se cure

Teorema de la probabilidad total:

$$p(E)=p(A)\cdot p(E/A)+p(B)\cdot p(E/B)+p(C)\cdot p(E/C)=0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}72$$

A.3.b) Teorema de Bayes:

$$p(A/E)=\frac{p(A\cap E)}{p(E)}=\frac{p(A)\cdot p(E/A)}{p(E)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}6}{0{,}72}=0{,}25$$

La producción en kilogramos por árbol de aguacates de una comarca sigue una distribución Normal de desviación típica 4 y media desconocida.

a) **(1 punto)** Obtenga el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la media poblacional con un error de estimación inferior a 2.1 kg y una confianza del 97 %.

b) **(1.5 puntos)** Se toma una muestra aleatoria de 9 árboles, cuyas producciones en kilogramos han sido:

15	120	50	40	5	46	52	48	10

Obtenga el intervalo de confianza al 97 % para estimar la producción media de aguacates por árbol y calcule el error máximo de estimación.

A.4.a) $p(z\leq z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}97}{2}$; $z_{\alpha/2}=2{,}17$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2=17{,}09$; La muestra debe ser de al menos 18 árboles

A.4.b) Al ser el mismo nivel de confianza, y ser menor la muestra, el error aumentará:

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(39{,}9965\ ;\ 45{,}7835)$

La amplitud del intervalo es: 5,7869. El error: 2,8935 kg

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Justifique que la matriz A tiene inversa y calcule A^{-1}.

b) **(1 punto)** Calcule, si existe, la matrix X que satisface la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

B.1.a) $|A| = -12 \neq 0$ → La matriz tiene inversa

Inversa(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

B.1.b) $X = A^{-1} \cdot B$ X = Inversa(A) B

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se considera la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

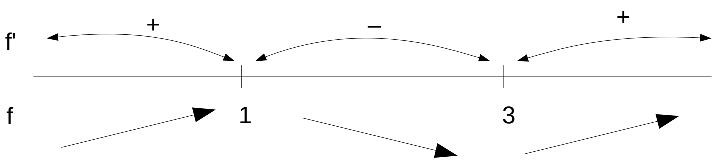
a) **(0.75 puntos)** Estudie su monotonía y halle sus extremos relativos.

b) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de concavidad y convexidad. Calcule su punto de inflexión.

c) **(0.5 puntos)** Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

d) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)\,dx$.

B.2.a) $Dom(f) = \mathbb{R}$ porque es un polinomio. $f'(x) = x^2 - 4x + 3$; $f'(x) = 0$ → $x = 3$, $x = 1$



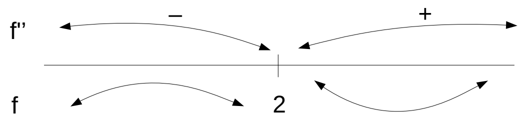
Creciente en *(–∞ , 1)* y en *(3 , +∞)*

Decreciente en *(1, 3)*

Máximo relativo en *x = 1*

Mínimo relativo en *x = 3*

B.2.b) $f''(x) = 2x - 4$; $f''(x) = 0$ → $x = 2$



Cóncava en *(–∞ , 2)*. Convexa en *(3 , +∞)*.

Punto de inflexión en *x = 2*

B.2.c) $f'(0) = 3$ → $m = 3$

B.2.d) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + K$

B.3.a) $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} \rightarrow p(A\cap B)=p(A/B)\cdot p(B)=0{,}4\cdot 0{,}25=0{,}1$

B.3.b) $p(A-B)=p(A)-p(A\cap B) \rightarrow p(A)=p(A-B)+p(A\cap B)=0{,}4+0{,}1=0{,}5$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}5+0{,}4-0{,}1=0{,}8$

B.3.c) $p(A)\cdot p(B)=0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}2\neq 0{,}1=p(A\cap B) \rightarrow$ Son dependientes

$p(A\cap B)=0{,}1\neq 0 \rightarrow$ Son compatibles

En una muestra de 320 personas jubiladas elegidas al azar en un distrito de una ciudad, resultó que 96 de ellas realizaban alguna actividad física.

a) **(1.5 puntos)** Construya un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de personas jubiladas que realizan alguna actividad física en ese distrito.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral, halle el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0.1 con un nivel de confianza del 98 %.

B.4.a) $P[Z\leq z_{\alpha/2}]=\dfrac{1+p}{2}=\dfrac{1+0{,}95}{2}=0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96$; $\overline{p}=\dfrac{96}{320}=0{,}30$

Int. de confianza para la proporción: $\left(\overline{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\,,\,\overline{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right)=(0{,}2498\ ;\ 0{,}3502)$

B.4.b) $P[Z\leq z_{\alpha/2}]=\dfrac{1+p}{2}=\dfrac{1+0{,}98}{2}=0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2}=2{,}325$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$; $n=\left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot\overline{p}(1-\overline{p})=113{,}65;$

La muestra debe ser de al menos 114 personas