Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.
2) $A \cdot A^t + B$ posee inversa.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + A = C$.

A.1.a) M = A Traspone(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica porque $M=M^t$

N = A Traspone(A) + B

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

No tiene inversa porque su determinante vale *0*

A.1.b) $X=B^{-1}(C-A)$

m1 = C − A

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

m2 = Inversa(B)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.33 & -0.17 \end{pmatrix}$$

X = Inversa(B) (C − A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

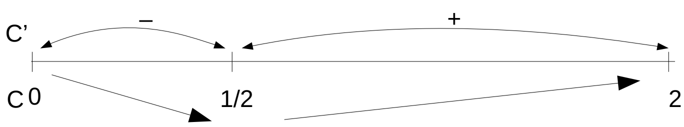
El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x)=2(2x-1)^2+1$, con $0 \le x \le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) **(1 punto)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

b) **(0.75 puntos)** Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

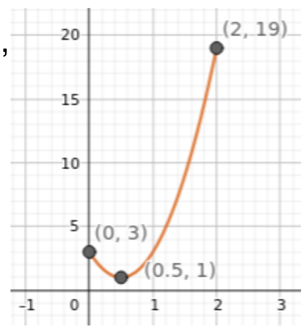
c) **(0.75 puntos)** Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

A.2.a) $Dom(C)=[0,2]$; $C'(x)=4(2x-1)\cdot 2=8(2x-1)$; $C'(x)=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$



La función es decreciente en [0, ½] y creciente en [½ , 2]. Tiene un mínimo en x = ½

A.2.b) $C(\frac{1}{2})=1$. El coste es mínimo si se producen medio millón de kilos, siendo este coste de 1 €



A.2.c) La función es una parábola que tiene el vértice en x = ½

$C(0)=3$; $C(2)=19$

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15 % de patinetes del modelo A, el 10 % del B y el 12 % del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

b) **(0.5 puntos)** Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.

A.3)

	A	B	C	
P	3,75	4	4,2	11,95
P'	21,25	36	30,8	88,05
	25	40	35	100

15% de 25 = 3,75 ; 10% de 40 = 4 ; 12% de 35 = 4,2

a) $p(P)=0{,}1195$

b) $p(P'/A)=\dfrac{p(P'\cap A)}{p(A)}=\dfrac{0{,}2125}{0{,}25}=0{,}85$

c) $p(P\cup C)=p(P)+P(C)-p(P\cap C)=0{,}1195+0{,}35-0{,}042=0{,}4275$

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo, con un 92 % de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

A.4.a) $\sigma=\sqrt{36}=6$; $p(z\leq z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}92}{2}$; $z_{\alpha/2}=1{,}75$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(33{,}6870\ ,\ 36{,}3130)$

A.4.b) $p(z\leq z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}98}{2}$; $z_{\alpha/2}=2{,}325$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2=48{,}71$; La muestra debe ser de al menos 49 participantes

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7.5 kg de grano de Colombia y 1.5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67.5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) **(1.75 puntos)** Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) **(0.25 puntos)** Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) **(0.5 puntos)** Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

B.1.a) x: *kg de tipo A* , y: *kg de tipo B*

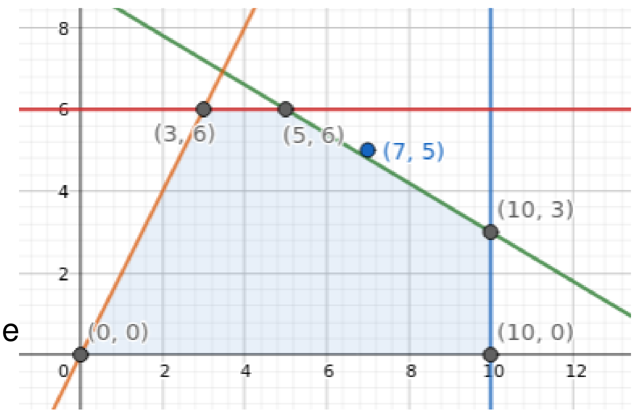
Colombia: $4{,}5x+7{,}5y\leq 67{,}5$

Etiopía: $3x\leq 30$

Costa R.: $1{,}5y\leq 9$

$$x\geq\frac{y}{2}$$

$$x\geq 0 \quad ; \quad y\geq 0$$



B.1.b) Comprobamos si el punto *(7 , 5)* no cumple alguna de las restricciones:

$4{,}5\cdot 7+7{,}5\cdot 5=69>67{,}5$. El punto está fuera de la región factible. No es posible producir esos kilos.

B.1.c) $B(x,y)=2x+4y$; $B(3,6)=30$; $B(5,6)=34$; $B(10,3)=32$; $B(10,0)=20$

El beneficio es máximo produciendo 5 kg del tipo A y 6 kg del tipo B, siendo este beneficio de 34 €

De una cierta función f, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) **(1 punto)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

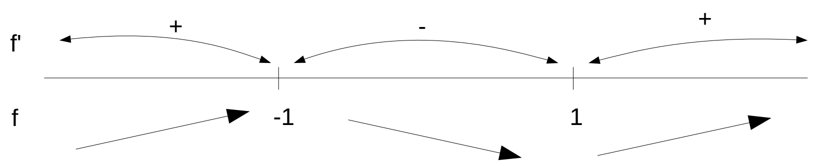
b) **(0.75 puntos)** Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1, 3)$.

B.2.a) La función será un polinomio de grado 3, por tanto, $Dom(f)=\mathbb{R}$

Monotonía: igualamos a 0 la derivada y estudiamos los intervalos:

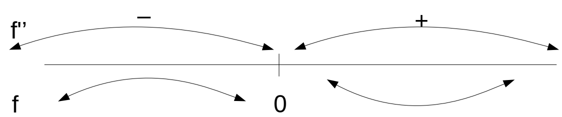
$3x^2-3=0 \rightarrow x=\pm 1$



La función es creciente en los intervalos *(–∞ , –1)* y *(1 , +∞)*. Decreciente en *(–1 , 1)*. Los extremos relativos están *x = –1* (máximo) y *x = 1* (mínimo).

B.2.b) Curvatura: igualamos a 0 la segunda derivada y estudiamos los intervalos:

$f''(x)=6x \ ; \ 6x=0 \rightarrow x=0$



La función es cóncava en el intervalo *(–∞ , 0)* y convexa en *(0 , +∞)*. Tiene un punto de inflexión en *x = 0*.

B.2.c) $f(x)=\int f'(x)dx=3\frac{x^3}{3}-3x+K$.

Imponemos el punto *(–1 , 3)* para calcular *K*: $f(-1)=-1+3+K=3 \rightarrow K=1$

$$f(x)=x^3-3x+1$$

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A\cap B) = 0.2 \qquad P(A\cup B) = 0.4 \qquad P(A/B) = 0.8$$

a) **(1.2 puntos)** Calcule $P(B)$ y $P(A)$.

b) **(0.5 puntos)** ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.

c) **(0.8 puntos)** Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

B.3.a) $p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)} \rightarrow p(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A/B)}=\frac{0,2}{0,8}=0,25$

$p(A)=p(A\cup B)-p(B)+p(A\cap B)=0,35$

B.3.b) $p(A)\cdot p(B)\neq p(A\cap B) \rightarrow$ son dependientes

B.3.c) $p(A'\cup B')=p((A\cap B)')=1-0,2=0,8$

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22 % de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) **(1.5 puntos)** Para un nivel de confianza del 92 %, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

b) **(1 punto)** Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

B.4.a)

$$P[Z \le z_{\alpha/2}] = \frac{1+p}{2} = \frac{1+0{,}92}{2} = 0{,}96 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1{,}75 \quad ; \quad \overline{p} = 0{,}22$$

Int. de confianza para la proporción: $\left(\overline{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\ , \overline{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right) = (0{,}1174\ ; 0{,}3226)$

B.4.b)

$$E = 0{,}03$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \quad ; \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \overline{p}(1-\overline{p}) = 584{,}37$$

La muestra debe ser de al menos 585 expedientes