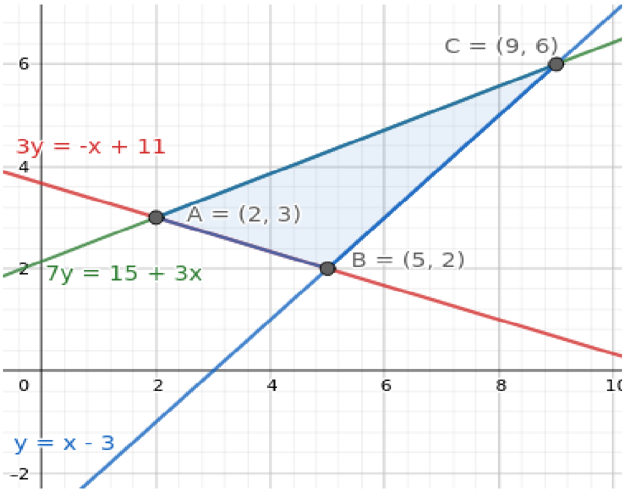
Consideremos el recinto definido por las siguientes desigualdades:

$$7y \leq 15 + 3x \qquad y \geq x - 3 \qquad 3y \geq -x + 11$$

a) **(2 puntos)** Represente gráficamente el recinto anterior y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Calcule en qué puntos se alcanzan los valores máximo y mínimo de la función $H(x, y) = 4x - y - 16$ restringida al anterior recinto y obtenga dichos valores.

A.1)



$H(2{,}3)=-11$; $H(5{,}2)=2$; $H(9{,}6)=14$

El mínimo se alcanza en el vértice A(2 , 3) y vale -11.

El máximo se alcanza en el vértice C(9 , 6) y vale 14.

a) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1}{2}\, ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad g(x) = (x^2+1)^2 \cdot e^{2x-1}$$

b) **(1.5 puntos)** Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^2 - 6x + 8$ en el punto de abscisa $x = 4$. Represente gráficamente la función h y la recta tangente hallada.

A.2.a) $$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)(1-x)}$$

$$g'(x) = 2(x^2+1)\cdot 2x\cdot e^{2x-1} + (x^2+1)^2\cdot 2\cdot e^{2x-1} = 2(x^2+1)e^{2x-1}(x^2+2x+1)$$

A.2.b) $h'(x) = 2x-6$; $\quad t:\ y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$h'(4)=2$; $h(4)=0$

$t:\ y=2(x-4)$; $y=2x-8$

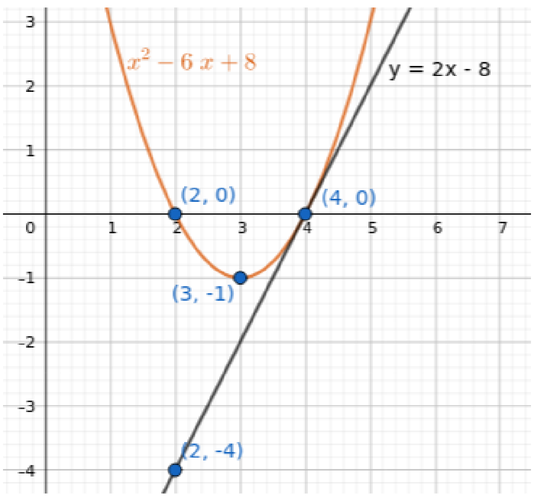
Vértice de la parábola: $x=3$, $y=-1$

Ya tenemos un punto: $x=4$, $y=0$.

Otro punto sería: $x=2$, $y=0$

En la recta también tenemos un punto: $x=4$, $y=0$.

Otro punto sería: $x=2$, $y=-4$



El 17 % de la población adulta de una ciudad sigue una dieta de adelgazamiento y practica algún deporte regularmente. El 58 % ni sigue una dieta de adelgazamiento ni hace deporte regularmente. Además, se sabe que de los que hacen deporte regularmente, el 50 % hace dieta de adelgazamiento. Se elige al azar un adulto de esa población.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que siga una dieta de adelgazamiento o que practique deporte regularmente?

b) **(1 punto)** Si el individuo elegido sigue una dieta de adelgazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que practique deporte con regularidad?

c) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos “Seguir una dieta de adelgazamiento” y “Practicar algún deporte regularmente”?

A.3)

	Di	Di’	
De	17	17	34
De’	8	58	66
	25	75	100

a) $p(Di \cup De) = 1 - p(Di' \cap De') = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$

b) $p(De / Di) = \frac{0{,}17}{0{,}25} = 0{,}68$

c) $p(Di \cap De) = 0{,}17 \; ; \; p(Di) \cdot p(De) = 0{,}25 \cdot 0{,}34 \neq 0{,}17$

No son independientes

La cantidad de azúcar que añade un fabricante de refrescos a sus productos sigue una ley Normal cuya varianza es 225 mg^2. Se ha seleccionado al azar una muestra de 25 refrescos de ese fabricante, en la que se ha obtenido una media de 175 mg de azúcar añadido por refresco.

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 90 % para la cantidad media de azúcar añadida a cada refresco.

b) **(1 punto)** ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el intervalo de confianza correspondiente al 80 % tenga una amplitud como máximo de 5 mg?

A.4.a) $p(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1+0{,}90}{2} \; ; \; z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (170{,}07 \; ; \; 179{,}93)$

A.4.b) $p(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1+0{,}80}{2} \; ; \; z_{\alpha/2} = 1{,}28$

$E = 2{,}5 \; ; \; E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = 59{,}13$; La muestra debe ser de al menos 60 refrescos

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$$A+B\cdot C \qquad A\cdot C+B\cdot D^t \qquad B^2+C\cdot D \qquad A+D\cdot C$$

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X\cdot(A+I_2)=3B^t$.

B.1.a) $A_{2\times2}+B_{2\times2}\cdot C_{2\times1}=A_{2\times2}+(B\cdot C)_{2\times1}$. No coinciden las dimensiones. No se puede sumar.

$A_{2\times2}\cdot C_{2\times1}+B_{2\times2}\cdot D^t_{2\times1}=(A\cdot C)_{2\times1}+(B\cdot D^t)_{2\times1}$. Sí coinciden. Se puede sumar.

$B_{2\times2}\cdot B_{2\times2}+C_{2\times1}\cdot D_{1\times2}=B^2_{2\times2}+(C\cdot D)_{2\times2}$. Sí coinciden. Se puede sumar.

$A_{2\times2}+D_{1\times2}\cdot C_{2\times1}=A_{2\times2}+(D\cdot C)_{1\times1}$. No coinciden las dimensiones. No se puede sumar.

m1 = A C $\rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \end{pmatrix}$

m2 = B Traspone(D) $\rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

m3 = m1 + m2 $\rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$

m4 = B^2 $\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

m5 = C D $\rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

m6 = m4 + m5 $\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$

B.1.b) $X=(A+I)^{-1}\cdot 3B^t$

m7 = Inversa(A + I) $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

m8 = 3 Traspone(B) $\rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

X = 3 Traspone(B) Inversa(A + I) $\rightarrow \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$

Se considera la función $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$, con $x \neq 0$, siendo a y b dos parámetros reales.

a) **(1 punto)** Determine el valor de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,\ 3)$.

b) **(0.75 puntos)** Para $a = 1$ y $b = 2$, razone si en el punto $(1,\ 3)$ la función presenta un máximo o un mínimo.

c) **(0.75 puntos)** Calcule $\int \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx$.

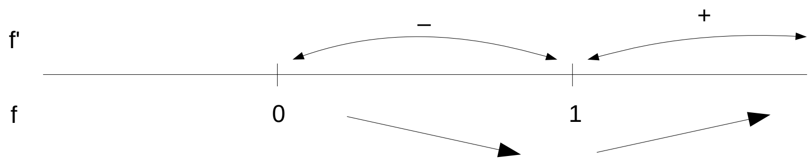
B.2.a) $f(1)=3 \rightarrow a+b=3$

$f'(x)=2ax-\frac{b}{x^2}$; $f'(1)=0 \rightarrow 2a-b=0$.

Se resuelve el sistema y obtenemos *a = 1 , b = 2*

B.2.b) $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$; $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$. Estudiamos la monotonía:

Hay que tener en cuenta que $Dom(f)=\mathbb{R}-(0)$



El punto (1 , 3) es un mínimo.

B.2.c) $\int (x^2+\frac{2}{x})dx=\frac{x^3}{3}+2\ln|x|+K$

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio dado. Se sabe que $P(A) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.75$ y $P(A - B) = 0.3$.

a) **(0.5 puntos)** Calcule $P(A \cap B)$.

b) **(1 punto)** Calcule $P(A/B^c)$.

c) **(1 punto)** ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Son los sucesos A y B incompatibles?

B.3.a) $p(A-B)=p(A)-p(A\cap B) \rightarrow p(A\cap B)=p(A)-p(A-B)=0{,}5-0{,}3=0{,}2$

B.3.b) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B) \rightarrow p(B)=p(A\cup B)+p(A\cap B)-p(A)=0{,}75+0{,}2-0{,}5=0{,}45$

$p(A/B')=\frac{p(A\cap B')}{p(B')}=\frac{p(A-B)}{1-p(B)}=\frac{0{,}3}{0{,}55}=0{,}5454$

B.3.c) $p(A\cap B)=0{,}2$; $p(A)\cdot p(B)=0{,}5\cdot 0{,}45\neq 0{,}2$. Son dependientes.

$p(A\cap B)=0{,}2\neq 0$. Son compatibles.

La Consejería de Educación elige una muestra de 5 000 estudiantes de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales y los encuesta para conocer la opinión que tienen sobre la elección de cierta materia entre las optativas para cursar 2º de Bachillerato. El resultado de la encuesta revela que 2 250 estudiantes piensan elegir dicha materia optativa.

a) **(1.5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 97.5 % para estimar la proporción de estudiantes que piensan elegir esa materia optativa.

b) **(1 punto)** Si en otra muestra la proporción de estudiantes que piensa elegir esa materia es de 0.5 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03 con un nivel de confianza del 92.5 %, calcule el tamaño muestral mínimo de esa muestra.

B.4.a) $P[Z \leq z_{\alpha/2}] = \frac{1+p}{2} = \frac{1+0{,}975}{2} = 0{,}9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}24 \quad ; \quad \overline{p} = \frac{2250}{5000} = 0{,}45$

Int. de conf. para la proporción: $\left(\overline{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\ , \overline{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right) = (0{,}4342\ ;\ 0{,}4658)$

B.4.b) $P[Z \leq z_{\alpha/2}] = \frac{1+p}{2} = \frac{1+0{,}925}{2} = 0{,}9625 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}78$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \quad ; \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \overline{p}(1-\overline{p}) = 880{,}57$

La muestra ha sido de al menos 881 estudiantes