a) **(1 punto)** Se considera el recinto cuadrado de vértices $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$ y $(0,\ -1)$.
Indique en qué puntos del recinto se alcanzan el valor máximo de la función $F(x,y) = 3x + 2y + 7$ y el valor mínimo de la función $G(x,y) = x + y + 6$, calculando dichos valores.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $(A - A^t)\cdot X = B$, siendo A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A.1.a) $F(1,0)=10\ ;\ F(0,1)=9\ ;\ F(-1,0)=4\ ;\ F(0,-1)=5$

El valor máximo de *F* se alcanza en el punto *(1 , 0)* y vale *10*

$G(1,0)=7\ ;\ G(0,1)=7\ ;\ G(-1,0)=5\ ;\ F(0,-1)=5$

El valor mínimo de *G* se alcanza en cualquier punto del segmento que une *(–1 , 0)* con *(0, –1)* . Su valor es 5.

A.1.b) $X=(A-A^t)^{-1}\cdot B$ m1 = A – Traspone(A) m2 = Inversa(m1)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

X = m2 B

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0.2 & -0.6 \end{pmatrix}$$

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) **(0.8 puntos)** Halle a y b de forma que f tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ tenga pendiente $m = -1$.

b) **(1.7 puntos)** Para $a = -1$ y $b = -1$, estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

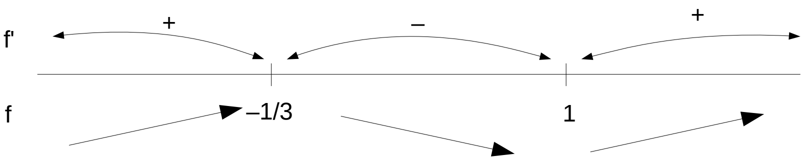
A.2.a) Extremo en *x = 1* : $f'(1)=0\ ;\ f'(x)=3x^2+2ax+b\ ;\ f'(1)=3+2a+b=0\ ;\ 2a+b=-3$

m = –1 en *x = 0* : $f'(0)=-1\ ;\ b=-1\ ;\ a=-1$

A.2.b) $f(x)=x^3-x^2-x+1\ ;\ f'(x)=3x^2-2x-1\ ;\ f''(x)=6x-2\ ;\ Dom(f)=\mathbb{R}$

Monotonía:

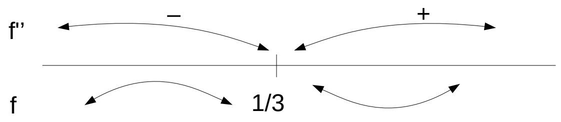
$f'(x)=0 \rightarrow x=1\ ,\ x=\dfrac{-1}{3}$



La función es creciente en *(–∞ , –1/3)* y en *(1 , +∞)*. Decreciente en *(–1/3 , 1)*

Tiene un máximo relativo en *x = –1/3* . Tiene un mínimo relativo en *x = 1*

Curvatura: $f''(x)=0 \rightarrow x=\frac{1}{3}$



La función es cóncava en *(–∞ , 1/3)* . Convexa en *(1/3 , +∞)*. Punto de inflexión en *x = ⅓*

Una cooperativa envasa zumos de naranja, zumos de piña y zumos de melocotón en botellas de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60 % de las botellas son de zumo de naranja y el 30 % de piña. Además, el 80 % de las botellas de zumo de naranja y el 70 % de las de zumo de piña son de 2 litros, mientras que el 60 % de las de melocotón son botellas de 1 litro. Se elige al azar una botella envasada por la cooperativa.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la botella sea de 2 litros.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que el zumo sea de naranja, sabiendo que la botella es de 2 litros.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que el zumo sea de melocotón, sabiendo que la botella es de 1 litro.

A.3)

	N	P	M	
U	12	9	6	27
D	48	21	4	73
	60	30	10	100

80% de 60 = 48 ; 70% de 30 = 21 ; 60% de 10 = 6

a) $p(D)=0{,}73$

b) $p(N/D)=\frac{p(N\cap D)}{p(D)}=\frac{0{,}48}{0{,}73}=0{,}6575$

c) $p(M/U)=\frac{p(M\cap U)}{p(U)}=\frac{0{,}06}{0{,}27}=0{,}2222$

Para estimar la proporción de empleados de una empresa que usan lentillas, se toma una muestra al azar de 60 empleados de la misma y se observa que 16 usan lentillas.

a) **(1.5 puntos)** Halle, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción.

b) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza del apartado anterior y manteniendo la misma proporción muestral, determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido en la estimación de la proporción sea inferior a 0.1.

A.4.a) $P[Z\leq z_{\alpha/2}]=\frac{1+p}{2}=\frac{1+0{,}90}{2}=0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}645$; $\overline{p}=\frac{16}{60}=0{,}27$

Int. de conf. para la proporción: $\left(\overline{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\,,\overline{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right)=(0{,}17\,;\;0{,}36)$

A.4.b) $E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$; $n=\left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot\overline{p}(1-\overline{p})=52{,}91\,;$ La muestra debe ser de al menos 53 empleados

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** ¿Tiene inversa la matriz $A\cdot B-C$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo, calcule $(A\cdot B-C)^{-1}$.

b) **(1 punto)** Resuelva la ecuación matricial $A\cdot B\cdot X-C\cdot X=C^t$.

B.1.a)

$m1 = A\,B \to \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

$m2 = A\,B - C \to \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$|AB-C|=2\neq 0$ → La matriz tiene inversa

$m3 = \text{Inversa}(A\,B - C) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1.5 \end{pmatrix}$

B.1.b) Para despejar hay que sacar factor común:

$ABX-CX=C^t$ → $(AB-C)X=C^t$ → $X=(AB-C)^{-1}C^t$

$X = \text{Inversa}(A\,B - C)\ \text{Traspone}(C) \to \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 0.5 \end{pmatrix}$

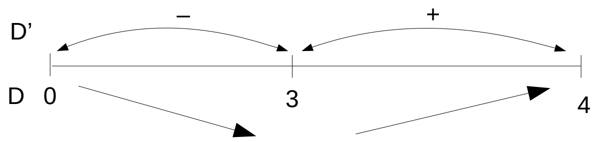
Unos productores de cereales realizan un estudio para conocer la posible demanda de su producto. Concluyen que la función de demanda de dichos cereales tiene la forma $D(x)=-200\,x^3+2\,100\,x^2-7\,200\,x+10\,000$, para $0\leq x\leq 4$, donde x es el precio en euros por kilogramo de producto y $D(x)$ es la cantidad de kilogramos de cereales que los consumidores están dispuestos a comprar a dicho precio x.

a) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la cantidad de cereales demandada si el precio es de 0.50 euros por kilogramo?

b) **(2 puntos)** Calcule para qué precio se alcanza una demanda mínima del producto y determine dicha demanda.

B.2.a) $D(0{,}5)=6900$ kg.

B.2.b) $D'(x)=-600\,x^2+4200\,x-7200$; $D'(x)=0$ → $x=3$, $x=4$



Para un precio de 3 €/kg se alcanza una demanda mínima. Esta es de:

$D(3)=1900$ kg.

Una determinada enfermedad puede estar provocada por una sola de las causas, A, B o C. En el 35 % de los casos está provocada por A, en el 40 % por B y en el 25 % por C.
Se sabe que el tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 15 % de los casos si está provocada por A, en el 45 % si está provocada por B y en un 20 % si está provocada por C. Se elige al azar una persona afectada por esa enfermedad.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que necesite hospitalización?

b) **(1 punto)** Si no necesita hospitalización, ¿cuál es la probabilidad de que la causa de la enfermedad sea C?

B.3)

	A	B	C	
H	5,25	18	5	28,25
H’	29,75	22	20	71,75
	35	40	25	100

15% de 35 = 5,25

45% de 22 = 18

20% de 20 = 5

a) $p(H)=0{,}2825$

b) $p(C/H')=\dfrac{p(C\cap H')}{p(H')}=\dfrac{20}{71{,}75}=0{,}2787$

El tiempo de duración, en horas, de un modelo de bombilla LED, sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 150 horas. Con una muestra de bombillas de ese modelo y a un nivel de confianza del 98.5 % se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es (18 475.7, 18 524.3).

a) **(1.5 puntos)** Calcule el valor que se obtuvo para la media de la muestra y el tamaño de la muestra utilizado.

b) **(1 punto)** ¿Cuál será el error máximo de estimación de la media si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6 %?

B.4.a) $\bar{x}=\dfrac{18475{,}7+18524{,}3}{2}=18500$ horas. $E=18500-18475{,}7=24{,}3$

$p(z\le z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}985}{2}$; $z_{\alpha/2}=2{,}43$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2=225$; La muestra debió ser de 225 bombillas

B.4.b) $p(z\le z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}966}{2}$; $z_{\alpha/2}=2{,}12$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=31{,}80$ horas