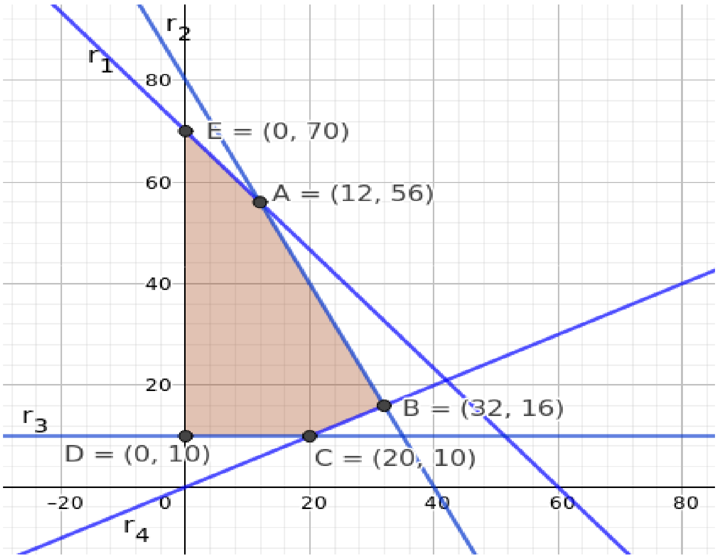
(2.5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4 200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

A.1) algodón: $70x+60y\le 4200$
poliéster: $20x+10y\le 800$
rentable: $y\ge 10$
doble: $2y\ge x$
$x\ge 0$; $y\ge 0$
Beneficio: $F(x,y)=5x+4y$

$F(A)=284$
$F(B)=224$
$F(C)=140$
$F(D)=40$
$F(E)=280$



Debería fabricar 12 camisetas lisas y 56 estampadas. Así consigue un beneficio de 284 €.

Se considera la función $f(x)=x^3-9x+2$.

a) **(1 punto)** Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función que sean paralelas a la recta $y=3x-3$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)\,dx$.

A.2.a) $y=3x-3$; $m=3$. Tenemos que buscar puntos en los que la derivada de *f* valga *3* :

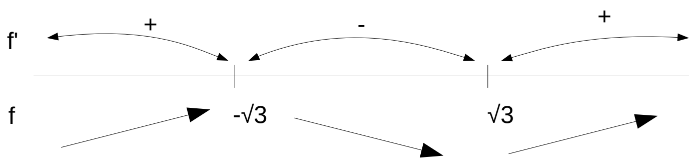
$f'(x)=3x^2-9$; $3x^2-9=3$; $x=\pm 2$

Calculamos la recta tangente en *2* y en *–2* :

t_1: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
$f'(2)=3$; $f(2)=-8$
t_1: $y=3(x-2)-8$; $y=3x-14$

t_2: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
$f'(-2)=3$; $f(-2)=12$
t_2: $y=3(x+2)+12$; $y=3x+18$

A.2.b) Dom f = ℝ $\quad f'(x)=0 \quad ; \quad x=\pm\sqrt{3}$

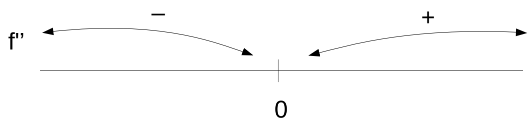


Creciente en $(-\infty,-\sqrt{3})$ y en $(\sqrt{3},+\infty)$

Decreciente en $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

Máx en x = –√3 . Mín en x = √3

$f''(x)=6x \quad ; \quad f''(x)=0 \quad ; \quad x=0$



Cóncava en $(-\infty,0)$

Convexa en $(0,+\infty)$

Punto de inflexión *x = 0*

A.2.c) $\int f(x)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}+2x+K$

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) **(1 punto)** Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

	Ca	Ru	
Ho	48,75	5,25	54
Ap	16,25	29,75	46
	65	35	100

75% de 65 = 48,75

15% de 35 = 5,25

A.3.a) $p(Ho)=0{,}54$

A.3.b) $p(Ru/Ap)=\frac{29{,}75}{46}=0{,}6467$

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partido político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensan votar a ese partido en dicha ciudad.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2 %.

A.4.a) $P[Z\leq z_{\alpha/2}]=\dfrac{1+p}{2}=\dfrac{1+0{,}97}{2}=0{,}985 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2}=2{,}17 \quad ; \quad \overline{p}=\dfrac{135}{300}=0{,}45$

Intervalo de confianza para la proporción: $\left(\overline{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\,,\overline{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right)=(0{,}388\,;\,0{,}512)$

A.4.b) $E=2\%=0{,}02$

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \quad ; \quad n=\left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot\overline{p}(1-\overline{p})=2913{,}87$$

La muestra debe ser de al menos 2014 personas

Se considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) **(0.5 puntos)** Razone si la matriz A es simétrica.

b) **(1 punto)** Calcule A^{-1}.

c) **(1 punto)** Resuelva la ecuación matricial $2X\cdot A-A^2-3I_3=O$.

B.1.a) Se debe cumplir $A=A^t$. No se cumple, no es simétrica

B.1.b) $|A|=-1$

$$\begin{matrix}A_{11}=3 & A_{12}=-2 & A_{13}=-2\\ A_{21}=-2 & A_{22}=1 & A_{23}=1\\ A_{31}=2 & A_{32}=-1 & A_{33}=-2\end{matrix} \quad . \quad A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

B.1.c) $X=\dfrac{1}{2}(3I+A^2)\cdot A^{-1}$

A^2

$$\rightarrow\begin{pmatrix}5 & -6 & 2\\ -6 & 7 & -3\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$3\cdot I + A^2$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}8 & -6 & 2\\ -6 & 10 & -3\\ -2 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}\,(3\,I + A^2)$ Inversa(A)

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-4 & -4 & -3\\ -4 & -\frac{1}{2} & -2\\ 3 & 2 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

b) **(1.5 puntos)** Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

B.2.a) El primer trozo es continnuo puesto que *x = 1* no está en su subdominio. El segundo trozo es continuo puesto que es una polinómica. Solo debemos estudiar *x = 0*

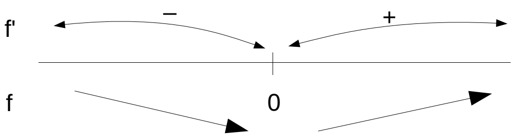
$$\begin{matrix} f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=a \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1 \end{matrix}$$. La función será continua si *a = –1*

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & , \ si \ \ x<0 \\ 2x & , \ si \ \ x>0 \end{cases}$$. De nuevo, solo hay que estudiar *x = 0* : $\begin{matrix} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=0 \end{matrix}$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

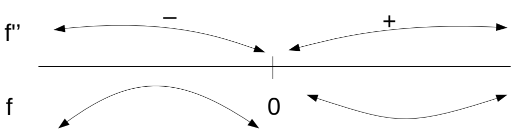
B.2.b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & , \ si \ \ x<0 \\ x^2-2 & , \ si \ \ x\geq 0 \end{cases}$; $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & , \ si \ \ x<0 \\ 2x & , \ si \ \ x>0 \end{cases}$; $f''(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & , \ si \ \ x<0 \\ 2 & , \ si \ \ x>0 \end{cases}$

Monotonía: $f'=0 \rightarrow x=\nexists$



La función es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$. Mínimo en $x=0$, $y=-2$

Curvatura: $f''=0 \rightarrow x=\nexists$



La función es cóncava en $(-\infty,0)$ y convexa en $(0,+\infty)$.

El punto $x=0$, $y=-2$ no sería punto de inflexión, ya que no es continua

EJERCICIO 3

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35 % películas y el 18 % no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que vea series o películas.

b) **(1 punto)** Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

B.3)

	Se	Se'	
Pe	22	13	35
Pe'	47	18	65
	69	31	100

a) $p(Se \cup Pe) = p(Se) + p(Pe) - p(Se \cap Pe) = 0{,}69 + 0{,}35 - 0{,}22 = 0{,}82$

b) $p(Pe/Se) = 22/69 = 0{,}3188$

c) $p(Se \cap Pe') = 0{,}47$

EJERCICIO 4

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.

b) **(1 punto)** Con una confianza del 95.5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1.5 minutos?

B.4.a) $\bar{X} = \dfrac{10+17+8+\dots}{9} = 15$

$p(z \le z_{\alpha/2}) = \dfrac{1+0{,}92}{2} = 0{,}96 \quad ; \quad z_{\alpha/2} = 1{,}75$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (8{,}737 \;;\; 21{,}263)$

B.4.b) $p(z \le z_{\alpha/2}) = \dfrac{1+0{,}955}{2} = 0{,}9775 \quad ; \quad z_{\alpha/2} = 2{,}005$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{E}\right)^2 = 114{,}31 \quad ;$ La muestra debe ser de al menos 115 empleados