Tema 4. Programación Lineal

0. Sistemas de ecuaciones lineales. Representación gráfica

Vamos a resolver este sistema gráficamente: $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$

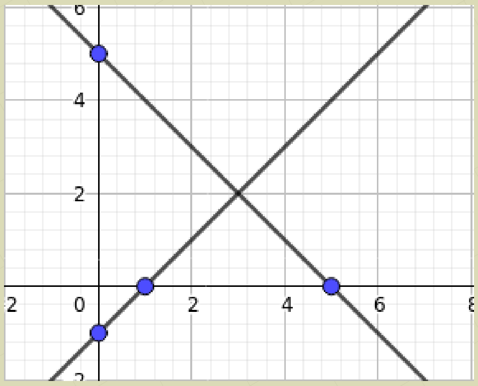
1. Cada ecuación es una recta: r_1 y r_2. Hacemos tablas de valores.

r1: x	y
0	5
5	0

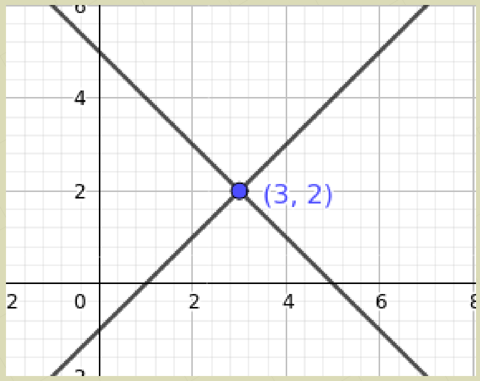
r2: x	y
0	–1
1	0

los mejores valores siempre son
x = 0 , y = 0
(aunque se obtengan decimales)

2. Representamos las rectas.



3. Solución: punto de corte



Es el **<u>único</u>** punto que cumple las dos ecuaciones

1. Sistemas de inecuaciones lineales. Representación gráfica

Vamos a resolver este sistema gráficamente: $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 5 \\ x-y\geq 1 \end{array}\right\}$

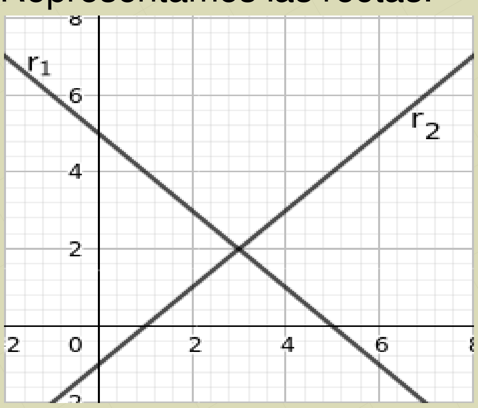
1. Cada inecuación es una recta: r_1 y r_2. Hacemos tablas de valores.

r1: x	y
0	5
5	0

r2: x	y
0	–1
1	0

los mejores valores siempre son
x = 0 , y = 0
(aunque se obtengan decimales)

2. Representamos las rectas.



Entre las dos rectas hemos obtenido 4 regiones. Una de ellas es la solución

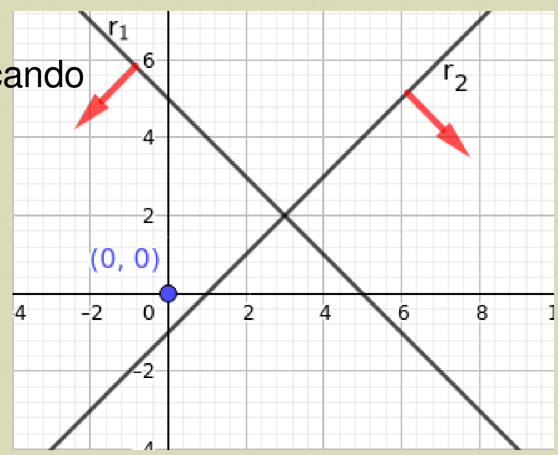
3. Solución: región que cumpla las dos inecuaciones ¿Cómo se sabe?

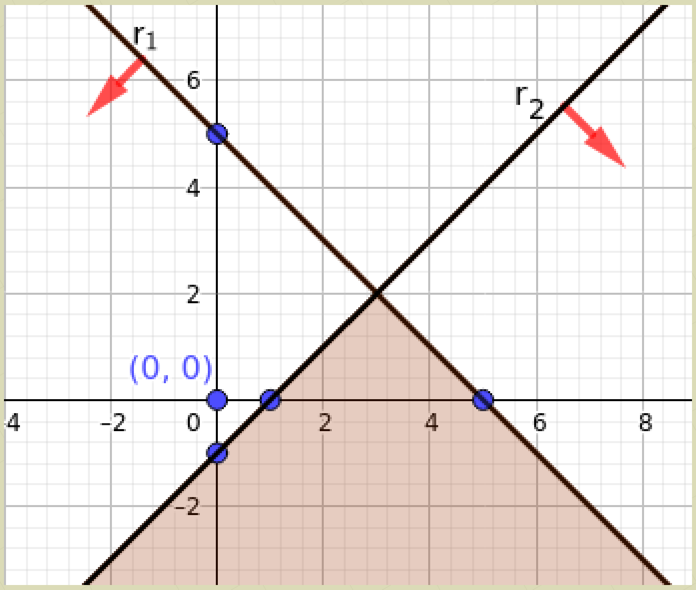
Elegimos un punto **<u>que esté fuera</u>** de las rectas. El mejor es el *(0 , 0)*. Se sustituye en las inecuaciones

$$(0\ ,\ 0) \begin{cases} r1:\ 0+0\leq 5? \rightarrow \surd \\ r2:\ 0-0\geq 1? \rightarrow ✗ \end{cases}$$

(0 , 0) está en la zona 'verdadera' de la r_1 y en la zona 'falsa' de la r_2.

Dibujamos una flechita indicando las **<u>zonas verdaderas</u>**





Todos los puntos (son infinitos) de esa región cumplen las dos inecuaciones. Son la solución del sistema

geogebra

Ficha 5 del coronavirus. Fecha de entrega: jueves 16 de abril 15:00

Representa gráficamente las soluciones de estos sistemas

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y\leq 5 \\ 2x-3y\geq 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+0{,}5y\leq 5 \\ 2x-3y\geq 6 \\ x\leq y \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y\leq 50 \\ 2x-3y\geq 60 \\ x\leq 100 \\ y\leq 100 \end{array}\right\}$

Soluciones: geogebra

Debes hacer los ejercicios en el cuaderno de matemáticas. Cuando los tengas, envías una foto al profesor en Edmodo

2. Ejercicios de Progamación lineal.

1. *Representar la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:*

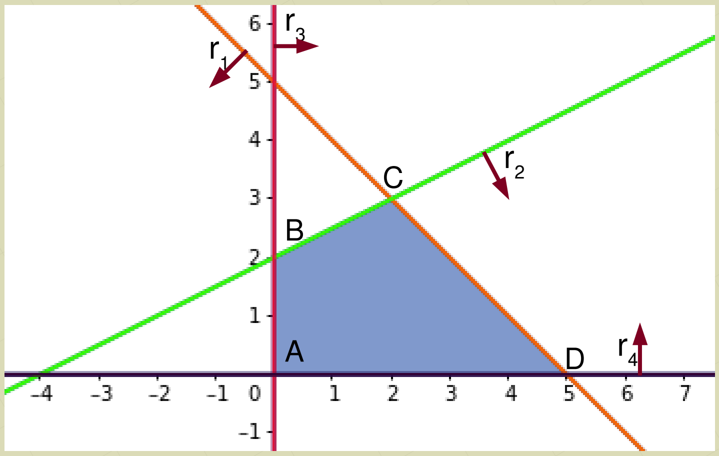
$$\begin{cases} x + y \leq 5 & \rightarrow r_1 \\ -x + 2y \leq 4 & \rightarrow r_2 \\ x \geq 0 & \rightarrow r_3 \\ y \geq 0 & \rightarrow r_4 \end{cases}$$

Averiguar en qué punto de la región se hace máxima la función

$$F(x, y) = 2x + 8y$$

y en qué punto se hace mínima.

1. Representamos la región de validez de las inecuaciones (restricciones)



2. Calculamos los vértices del recinto de validez. *(Algunos de ellos estarán en las tablas de valores que hemos hecho para la gráfica, no hace falta calcularlos)*

$A(0,0)$ $B:\begin{cases} r_2: & -x+2y=4 \\ r_3: & x=0 \end{cases} \rightarrow B(0,2)$ $C:\begin{cases} r_2: & -x+2y=4 \\ r_1: & x+y=5 \end{cases} \rightarrow C(2,3)$ $D:\begin{cases} r_1: & x+y=5 \\ r_4: & y=0 \end{cases} \rightarrow B(5,0)$

hay que hacer el sistema. No basta con verlo en el dibujo

3. Buscamos el máximo o mínimo de la función *F*. Estarán en los vértices, siempre que la región esté cerrada

$$F(A)=2\cdot 0+8\cdot 0=0$$
$$F(B)=0\cdot 0+8\cdot 2=16$$
$$F(C)=2\cdot 2+8\cdot 3=28$$
$$F(D)=2\cdot 5+8\cdot 0=10$$

El máximo de F se alcanza en x = 2 , y = 3. El máximo vale 28.
El mínimo de F se alcanza en x = 0 , y = 0. El mínimo vale 0.

2. *Representar la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:*

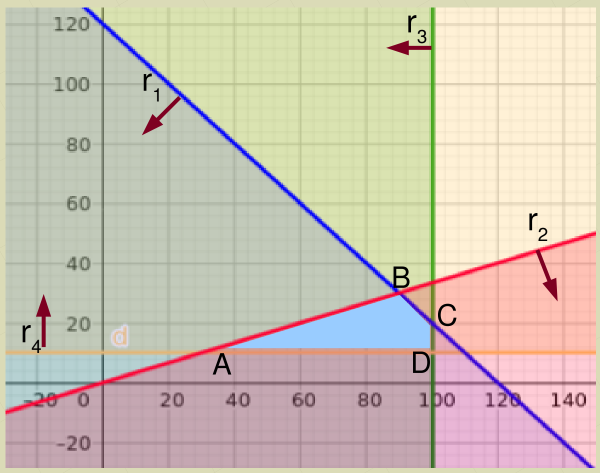
$$\begin{cases} x + y \leq 120 & \rightarrow r_1 \\ 3y - x \leq 0 & \rightarrow r_2 \\ x \leq 100 & \rightarrow r_3 \\ y \geq 10 & \rightarrow r_4 \end{cases}$$

¿En qué punto la función

$$F(x, y) = 5x + 2y$$

alcanza el valor máximo?

1. Representamos la región de validez de las inecuaciones (restricciones)



2. Calculamos los vértices del recinto de validez. *(Algunos de ellos estarán en las tablas de valores que hemos hecho para la gráfica, no hace falta calcularlos)*

$A:\begin{cases} r_2: & 3y-x=0 \\ r_4: & x=10 \end{cases} \rightarrow A\left(10,\frac{10}{3}\right)$ $B:\begin{cases} r_2: 3y-x=0 \\ r_1: x+y=120 \end{cases} \rightarrow B(90,30)$

hay que hacer el sistema. No basta con verlo en el dibujo

$C:\begin{cases} r_1: & x+y=120 \\ r_3: & x=100 \end{cases} \rightarrow C(100,20)$ $D:\begin{cases} r_3: x=100 \\ r_4: \ y=10 \end{cases} \rightarrow D(100,10)$

3. Buscamos el máximo o mínimo de la función *F*. Siempre están en los vértices

$$F(A)=5\cdot 10+2\cdot\frac{10}{3}=\frac{170}{3}$$
$$F(B)=5\cdot 90+2\cdot 30=510$$
$$F(C)=5\cdot 100+2\cdot 20=540$$
$$F(D)=5\cdot 100+2\cdot 10=520$$

El máximo de F se alcanza en x = 100 , y = 20. El máximo vale 540 .
El mínimo de F se alcanza en x = 10 , y = 10/3. El mínimo vale 170/3 .

Ficha 6 del coronavirus. Fecha de entrega: lunes 20 de abril 15:00

1 Representa la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 0, \quad y \geq 3, \quad x + y \leq 10, \quad 2y \geq 3x$$

Averigua en qué puntos se hace máxima y mínima la función $F(x, y) = 4x + 3y$.

Solución:

geogebra

2 Representa el recinto definido por estas inecuaciones:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad x \leq 10 \qquad x \leq y \qquad y - 2x \leq 6 \qquad 3x + 4y \geq 35$$

¿En qué punto la función $F(x, y) = 10x + 15y$ alcanza el valor máximo?

geogebra

4 En la región determinada por $x + y \geq 5$, $x + 3y \geq 9$, $4x + y \geq 8$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, halla el punto en el que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?

geogebra

Debes hacer los ejercicios en el cuaderno de matemáticas. Cuando los tengas, envías una foto al profesor en Edmodo

Ficha 7 del coronavirus. Fecha de entrega: jueves 23 de abril 15:00

1. a) **(1 punto)** Se considera el recinto cuadrado de vértices $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$ y $(0,\ -1)$.

   Indique en qué puntos del recinto se alcanzan el valor máximo de la función $F(x,y) = 3x + 2y + 7$ y el valor mínimo de la función $G(x,y) = x + y + 6$, calculando dichos valores.

   Solución

   b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $(A - A^t) \cdot X = B$, siendo A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Consideremos el recinto definido por las siguientes desigualdades:

$$7y \leq 15 + 3x \qquad y \geq x - 3 \qquad 3y \geq -x + 11$$

   a) **(2 puntos)** Represente gráficamente el recinto anterior y calcule sus vértices.

   b) **(0.5 puntos)** Calcule en qué puntos se alcanzan los valores máximo y mínimo de la función $H(x,y) = 4x - y - 16$ restringida al anterior recinto y obtenga dichos valores.

   Solución

3. EJERCICIO 1

   Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \leq 11 \qquad x \geq 2y - 5 \qquad 3x + y \leq 18 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

   a) **(1.8 puntos)** Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

   b) **(0.5 puntos)** Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x,y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

   c) **(0.2 puntos)** Justifique si el punto $(5.5, 2)$ pertenece a la región factible.

   Solución

Debes hacer los ejercicios en el cuaderno de matemáticas. Cuando los tengas, envías una foto al profesor en Edmodo

3. Problemas de Progamación lineal.

Problema 0.1.

Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono. Calcula cuántas palas puede fabricar de cada modelo **usando** 7.5 kg de fibra de carbono.

Identificamos las incógnitas:

x : número de palas del modelo A

y : número de palas del modelos B

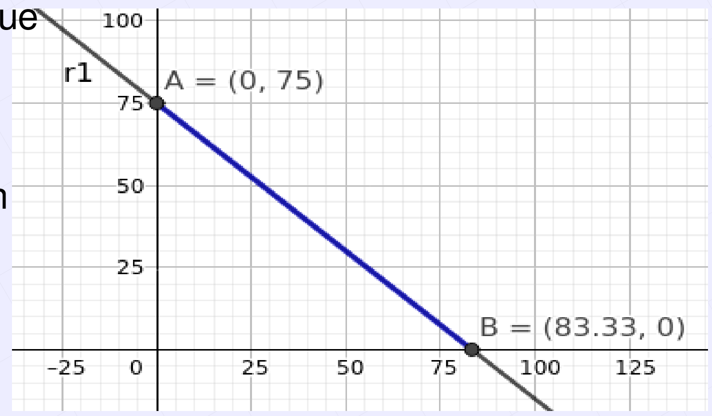
Planteamos la ecuación: $90x+100y=7500$:r1

No hay más datos. Esta ecuación tiene infinitas soluciones:

x	y
0	75
30	48
60	21
83,3	0

Como no podemos poner todas las soluciones en la tabla, lo que hacemos es representarlas:

Las soluciones de la ecuación serían los infinitos puntos de la recta. Pero para el problema, las soluciones negativas no son válidas y tampoco las que sean decimales. Las soluciones son todos los puntos comprendidos entre A y B



este es el motivo para buscar siempre los puntos (0, ?) , (? , 0)

Problema 0.2.

Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y 100 g de goma EVA, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono y 50 g de goma EVA. Calcula cuántas palas puede fabricar de cada modelo **usando** 7.5 kg de fibra de carbono y 6.5 kg de goma.

Identificamos las incógnitas:

x : número de palas del modelo A

y : número de palas del modelos B

Planteamos las ecuaciones:

$$\text{fibra: } 90x+100y=7500 \text{ :r1}$$
$$\text{goma: } 100x+50y=6500 \text{ :r2}$$

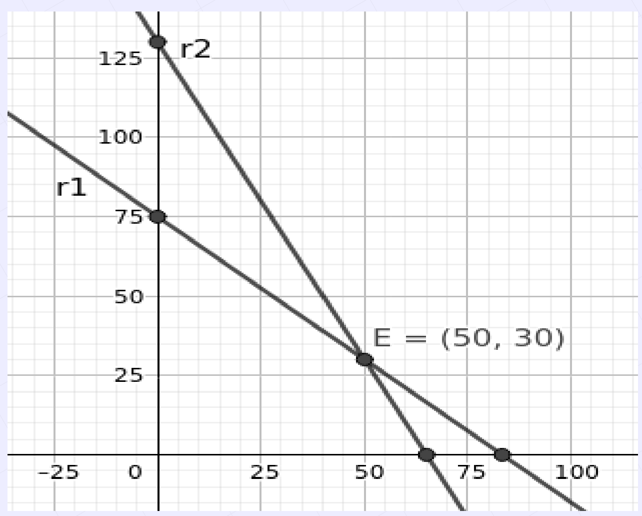
Cada ecuación tiene infinitas soluciones:

r1:	x	y
	0	75
	30	48
	60	21
	83,3	0

r2:	x	y
	0	130
	30	70
	60	10
	65	0

Este sistema sí podemos resolverlo. La solución es x = 50 , y = 30

Pero también se puede representar. Cada ecuación tiene infinitas soluciones, pero solo hay una que sea solución del sistema. El problema tiene solución única.



Problema 0.3.

Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y 100 g de goma EVA, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono y 50 g de goma EVA. Calcula cuántas palas puede fabricar de cada modelo **usando** 7.5 kg de fibra de carbono y 6.5 kg de goma, sabiendo además que ese día se quieren fabricar 60 modelos del tipo A

Identificamos las incógnitas:

x : número de palas del modelo A

y : número de palas del modelos B

Planteamos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{fibra:}&\ 90x+100y=7500 \quad :\text{r1} \\ \text{goma:}&\ 100x+50y=6500 \quad :\text{r2} \\ \text{mod A:}&\ x=60 \quad :\text{r3} \end{aligned}$$

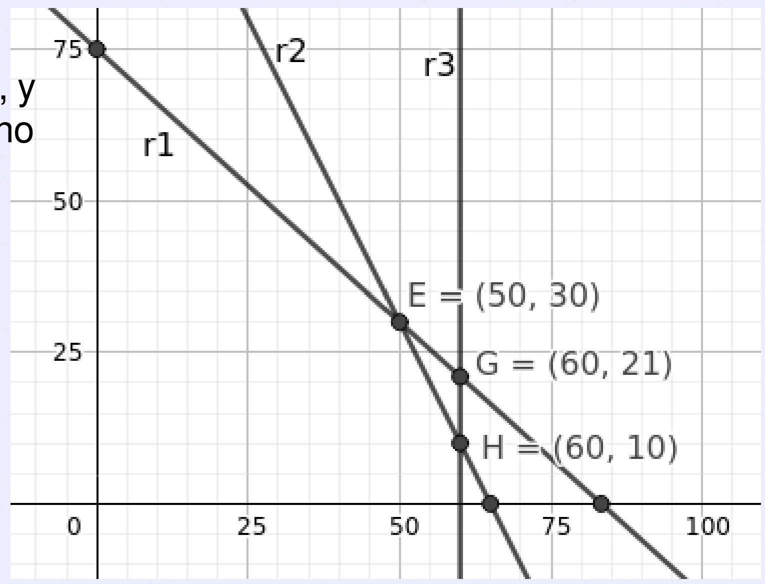
Cada ecuación tiene infinitas soluciones:

r1:	x	y
	0	75
	30	48
	60	21
	83,3	0

r2:	x	y
	0	130
	30	70
	60	10
	65	0

r3:	x	y
	60	0
	60	10
	60	20
	60	30

Este sistema no tiene solución, es incompatible. Pero sí se puede representar. Cada ecuación tiene infinitas soluciones, y hay soluciones para cada dos parejas de ecuaciones, pero no hay una solución para el sistema.



Problema 0.4.

Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y 100 g de goma EVA, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono y 50 g de goma EVA. La fábrica dispone diariamente de 7.5 kg de fibra de carbono y 6.5 kg de goma EVA y quiere producir como máximo 60 unidades diarias del modelo A.

a) Calcula cuántas palas de cada modelo puede fabricar en un día.

b) ¿Sería posible una producción diaria de 49 palas del modelo A y 32 palas del modelo B?

La gran diferencia de este problema con los anteriores es que pregunta cuántas puede fabricar en un día (como máximo). No tiene porqué gastar toda la fibra, ni toda la goma, ni tiene porqué hacer 60. Podría hacer menos de 60.

En este caso no tenemos ecuaciones, sino **inecuaciones**: restricciones

Identificamos las incógnitas:

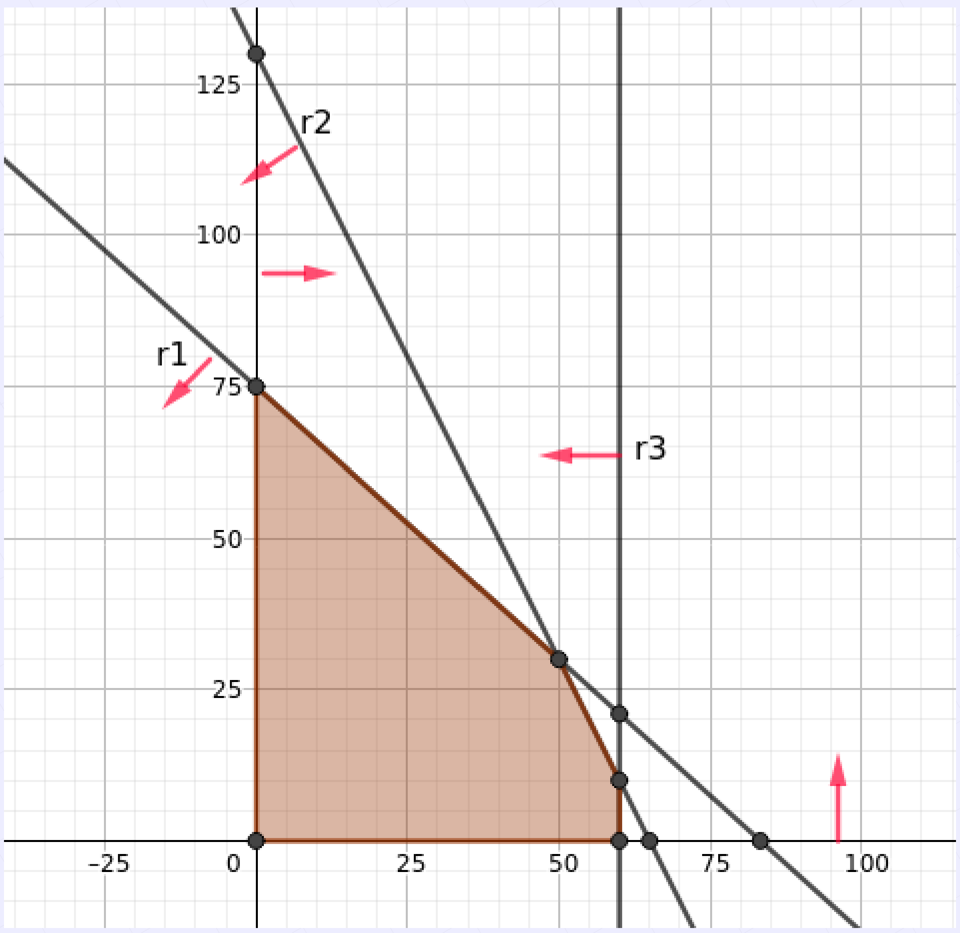
x : número de palas del modelo A

y : número de palas del modelos B

Planteamos las restricciones:

$$\begin{array}{lrl} \text{fibra:} & 90x+100y\leq 7500 & :\text{r1} \\ \text{goma:} & 100x+50y\leq 6500 & :\text{r2} \\ \text{mod A:} & x\leq 60 & :\text{r3} \\ & x\geq 0 & :\text{r4} \\ & y\geq 0 & :\text{r5} \end{array}$$

Las soluciones de este problema están en una región del plano: región de validez



Respuestas:

a) Cualquier punto dentro de la región de validez puede ser solución del problema

b) Hay que comprobar que cumple todas las restricciones (no vale con mirar la gráfica)

En este caso la respuesta es NO, no cumple la r1 : 90·49+100·32=7610>7500

Problema 1.

OPCIÓN B septiembre 2018

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B con los que obtiene un beneficio por cada pala de 30 y 20 euros respectivamente. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y 100 g de goma EVA, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono y 50 g de goma EVA. La fábrica dispone diariamente de 7.5 kg de fibra de carbono y 6.5 kg de goma EVA y quiere producir como máximo 60 unidades diarias del modelo A. Calcule cuántas palas de cada modelo tiene que fabricar para que el beneficio sea máximo y determine su importe.

¿Sería posible una producción diaria de 49 palas del modelo A y 32 palas del modelo B?

Aquí el problema ya está completo. Se ha añadido la **función objetivo** que queremos **optimizar** (en este caso maximizar, conseguir el máximo). En este problema la función objetivo es el beneficio (€)

Siempre hay que seguir estos pasos:

1. Identificamos las incógnitas: calcule cuántas palas ...

   x : número de palas del modelo A

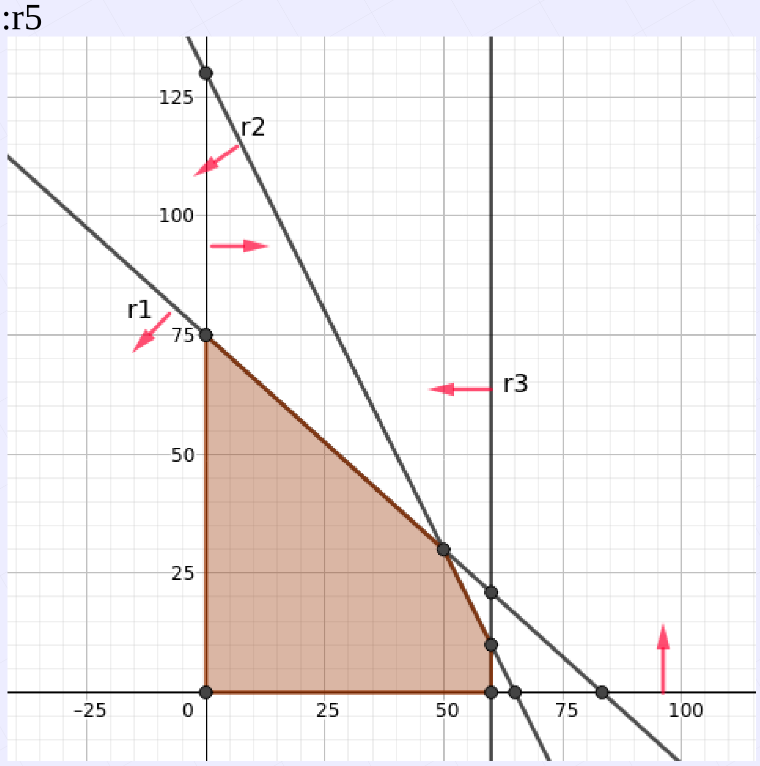
   y : número de palas del modelos B

2. Planteamos la función objetivo: Beneficio → $F(x,y)=30x+20y \quad :€$ se usa al final

3. Planteamos las restricciones:

$$\begin{array}{lrl} \text{fibra:} & 90x+100y\le 7500 & :\text{r1} \\ \text{goma:} & 100x+50y\le 6500 & :\text{r2} \\ \text{mod A:} & x\le 60 & :\text{r3} \\ & x\ge 0 & :\text{r4} \\ & y\ge 0 & :\text{r5} \end{array}$$

4. Representamos la región de validez:



5. Calculamos los vértices. Hay que hacer sistemas, casi siempre:

   $A(0,0) \quad B(0,75) \quad C(50,30) \quad D(60,10) \quad E(60,0)$

6. Buscamos el máximo de F en la región:

   $F(B)=1500$

   $F(C)=2100$

   $F(D)=2000$

   $F(E)=1800$

7. Contestamos:

   El máximo beneficio es de 2100 €. Se consigue fabricando 50 unidades diarias del mod A y 30 del B

1. EJERCICIO 1
(2.5 puntos) Un taller fabrica y vende dos tipos de alfombras, de seda y de lana. Para la elaboración de una unidad se necesita un trabajo manual de 2 horas para el primer tipo y de 3 horas para el segundo y de un trabajo de máquina de 2 horas para el primer tipo y de 1 hora para el segundo. Por cuestiones laborales y de planificación, se dispone de hasta 600 horas al mes para el trabajo manual y de hasta 480 horas al mes para el destinado a la máquina.
Si el beneficio por unidad para cada tipo de alfombra es de 150 € y 100 €, respectivamente, ¿cuántas alfombras de cada tipo debe elaborar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende el mismo?

Solución

2. EJERCICIO 1
(2.5 puntos) Una empresa fabrica dos tipos de agua de colonia, A y B. La colonia A contiene un 5% de extracto de rosas y un 10% de alcohol, mientras que la B se fabrica con un 10% de extracto de rosas y un 15% de alcohol. El precio de venta de la colonia A es de 24 €/litro y el de la B es de 40 €/litro. Se dispone de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol. ¿Cuántos litros de cada colonia convendría fabricar para que el importe de la venta de la producción sea máximo?

Solución

3. EJERCICIO 1
a) **(1.5 puntos)** Plantee, sin resolver, el siguiente problema:
"Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños, pequeños y grandes. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada envase grande. ¿Qué número de envases de cada tipo proporciona el mínimo coste de almacenaje?"
b) **(1 punto)** Represente el recinto que determinan las inecuaciones

$$2x \geq 10 + y, \quad x \leq 2(5 - y), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Solución

Debes hacer los ejercicios en el cuaderno de matemáticas. Cuando los tengas, envías una foto al profesor en Edmodo

1. EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 €. ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

Solución

2. EJERCICIO 1

a) **(0.8 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\le 3 \qquad 2x+y\ge 4 \qquad y\ge -1$$

b) **(0.25 puntos)** Razone si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

c) **(1.2 puntos)** Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x,y)=5x+4y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

d) **(0.25 puntos)** Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

Solución

3. EJERCICIO 1

a) **(1.2 puntos)** Represente el recinto dado por las siguientes inecuaciones:

$$y\le x+3 \qquad x+5y\ge 3 \qquad 2x+7y\le 30 \qquad y\ge 0$$

b) **(0.5 puntos)** Razone si el punto (5, 3) pertenece al recinto anterior.

c) **(0.8 puntos)** Obtenga los valores mínimo y máximo de la función $F(x,y)=x-y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

Solución

4. EJERCICIO 1

a) **Representa el recinto que forman estas tres inecuaciones y calcula sus vértices**

$$x+y\ge 25 \qquad x+4y\ge 25 \qquad 4x+y\ge 25$$

b) Calcula los valores mínimos de estas funciones en el recinto y los puntos donde se alcanzan dichos mínimos

$$F(x,y)=x+2y+20 \qquad G(x,y)=x+y+20 \qquad H(x,y)=x+4y+20$$