Tema 9: Integrales de Funciones

1. Integrales indefinidas. Definición
2. Reglas de integración.
3. Integrales "casi inmediatas"
   - Integrales arc
4. Integrales por cambio de variable
5. Integrales por partes
6. Integrales definidas
7. Áreas de recintos entre curvas
8. Integrales racionales

1. Integral Indefinida

Derivada y primitiva:

Una función *F* es primitiva de *f* si al derivar *F* se obtiene *f*

F es primitiva de *f* : $\quad F' = f$

Ejemplo:

Una primitiva de $2x$ es x^2 porque $(x^2)' = 2x$

Otra primitiva de $2x$ es x^2+5 porque $(x^2+5)' = 2x$

Otra primitiva de $2x$ es x^2-5 porque $(x^2-5)' = 2x$

Hacer una integral (indefinida) de una función es encontrar las primitivas de esa función.

$$\mathbf{x^2+K \quad \text{es primitiva de} \quad 2x}$$

Esto se representa así: $\int (2x)\,dx = x^2+K$

integral de 2x
por la diferencial de x

$$F \leftarrow f \rightarrow f' \rightarrow f'' \quad \ldots$$
$$\int f \leftarrow f \rightarrow \ldots$$

$\int (6x)\,dx = 3x^2+K \quad$ pq $\quad (3x^2+K)' = 6x$

$\int (4x^3)\,dx = x^4+K \quad$ pq $\quad (4x^3+K)' = x^4$

$\int (8x^3)\,dx = 2x^4+K \quad$ pq $\quad (2x^4+K)' = 8x^3$

$\int 2\,dx = \int (2)\,dx = 2x+K \quad$ pq $\quad (2x+K)' = 2$

$\int dx = \int (1)\,dx = x+K \quad$ pq $\quad (x+K)' = 1$

$\int (x)\,dx = \frac{x^2}{2}+K \quad$ pq $\quad (\frac{x^2}{2}+K)' = \frac{2x}{2} = x$

$\int (x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}+K \quad$ pq $\quad (\frac{x^3}{3}+K)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$

$\int (5x^2)\,dx = \frac{5x^3}{3}+K \quad$ pq $\quad (\frac{5x^3}{3}+K)' = \frac{15x^2}{3} = 5x^2$

Las primitivas de $5x^2$ *son* $\frac{5x^3}{3}+K$

2. Reglas de integración

Suma – resta:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

si tenemos una suma, se puede separar en dos integrales

Producto por un escalar:

$$\int (a \cdot f(x))\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$$

si tenemos un número multiplicando, puede salir (o entrar) de la integral

Producto – cociente: No hay propiedad

$$\cancel{\int (f(x) \cdot g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx}$$

$$\cancel{\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}}$$

si tenemos un producto o un cociente, **no se puede separar** en dos integrales

Reglas

(1) $\int a\,dx = ax + K$

(2) $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + K \quad (\text{si } n \neq -1)$

$$\int 3\,dx = 3x + K$$

$$\int dx = x + K \qquad \left(\int 1\,dx = 1x + K\right)$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + K$$

$$\int (2x+1)^3 \cdot 2\,dx = \frac{(2x+1)^4}{4} + K$$

$$\int (x+1)^3\,dx = \frac{(x+1)^4}{4} + K$$

(2)

$$\int (2x^2+x)\,dx=\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+K$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx=\int x^{-2}\,dx=\frac{x^{-1}}{-1}=\frac{1}{-1x}=\frac{-1}{x}+K$$

$$\int \frac{3}{(3x+2)^3}\,dx=\int (3x+2)^{-3}3\,dx=\frac{(3x+2)^{-2}}{-2}=\frac{-2}{(3x+2)^2}+K$$

$$\int 3(x+2)^3\,dx=3\cdot\int (x+2)^3\,dx=3\cdot\frac{(x+2)^4}{4}=\frac{3}{4}\cdot(x+2)^4+K$$

$$\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+K$$

(3) $\int \frac{1}{u}\,du=\ln|u|+K$

$$\int \frac{4}{x}\,dx=4\cdot\int \frac{1}{x}\,dx=4\cdot\ln|x|+K$$

(3) $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+K$

$$\int \frac{4}{4x-3}\,dx=\ln|4x-3|+K$$

(3) $\int u^{-1}\,du=\ln|u|+K$

$$\int \frac{4}{x-3}\,dx=4\cdot\int \frac{1}{x-3}\,dx=4\cdot\ln|x-3|+K$$

(4) $\int e^u\,du=e^u+K$

$$\int e^x\,dx=e^x+K$$

$$\int 2e^{2x}\,dx=e^{2x}+K$$

$$\int 2xe^{x^2}\,dx=e^{x^2}+K$$

(5) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + K$

$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + K$

$\int 2x 3^{x^2-2} dx = \frac{3^{x^2-2}}{\ln 3} + K$

(6) $\int (sen\, u) du = -\cos u + K$

$\int senx\, dx = -cosx + K$

(6) $\int (\cos u) du = sen u + K$

$\int \cos(x-2) dx = sen(x-2) + K$

$\int 3 \cdot \cos(x-2) dx = 3 \cdot sen(x-2) + K$

$\int 3 \cdot \cos(3x-2) dx = sen(3x-2) + K$

(7) $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = tg u + K$

$\int \frac{2}{\cos^2(2x)} du = tg(2x) + K$

(8) $\int \frac{1}{1+u^2} du = arc\, tg\, u + K$

$\int \frac{3x^2}{1+x^6} du = \int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2} du = arc\, tg\, x^3 + K$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = arc\, sen\, u + K$

$\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} du = 3\, arc\, sen\, x + K$

(9) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} du = arc \cos u + K$

$\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} du = \int \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} du = arc \cos x^2 + K$

3. Integrales “casi inmediatas”

Son integrales que se convierten en inmediatas con pequeños cambios.

La regla principal para esto es la de que los números que estén multiplicando (o dividiendo) pueden salir o entrar en la integral según nos interese.

$$\int (a \cdot f(x))\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$$

Ejemplo 1:

- Inmediata: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + K$
- Inmediata: $\int (x-4)^2\,dx = \frac{(x-4)^3}{3} + K$

video

- Inmediata: $\int 3(3x-4)^2\,dx = \frac{(3x-4)^3}{3} + K$
- Casi inmediata: $\int (3x-4)^2\,dx = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \int (3x-4)^2\,dx = \frac{1}{3} \cdot \int 3(3x-4)^2\,dx =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-4)^3}{3} = \frac{(3x-4)^3}{9} + K$$

- Casi inmediata: $\int 3x(5x^2-1)^4\,dx = 3 \cdot \frac{1}{10} \cdot 10 \cdot \int x(5x^2-1)^4\,dx = \frac{3}{10} \cdot \int 10x(5x^2-1)^4\,dx =$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{(5x^2-1)^5}{5} = \frac{3(3x-4)^5}{50} + K$$

3. Integrales “casi inmediatas”

Ejemplo 2:

- Inmediata: $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+K$
- Inmediata: $\int \frac{1}{x-4}dx=\ln|x-4|+K$
- Inmediata: $\int \frac{3}{3x-4}dx=\ln|3x-4|+K$
- Casi inmediata: $\int \frac{4}{3x-4}dx=4\cdot\frac{1}{3}\cdot 3\int \frac{1}{3x-4}dx=4\cdot\frac{1}{3}\int \frac{3}{3x-4}dx=\frac{4}{3}\ln|3x-4|+K$
- Casi inmediata: $\int \frac{5x}{5x^2-1}dx=2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{5x}{5x^2-1}dx=\frac{1}{2}\cdot\int \frac{10x}{5x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln|5x^2-1|+K$

Ejemplos 3:

- Casi inmediata: $\int sen(3x)dx=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\int sen(3x)dx=\frac{1}{3}\cdot\int 3\,sen(3x)dx=$
  $=\frac{1}{3}\cdot(-\cos(3x))=\frac{-\cos(3x)}{3}+K$
- Casi inmediata: $\int 4xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\int 2xe^{x^2}dx=\frac{4}{2}e^{x^2}=2e^{x^2}+K$
- Casi inmediata: $\int (tg\,x)dx=\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx=-\int \frac{-sen\,x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+K$
- Casi inmediata: $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx=\int x(x^2+3)^{1/2}dx=\frac{1}{2}\cdot\int 2x(x^2+3)^{1/2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+3)^{3/2}}{3/2}=$
  $=\frac{(x^2+3)^{3/2}}{3}=\frac{\sqrt{(x^2+3)^3}}{3}+K$

3. Integrales "casi inmediatas"

Integrales *arc tg , arc sen , arc cos*

$$\int \frac{c}{a+bx^2}dx = A\cdot\int\frac{1}{1+u^2}du = A\cdot arc\,tg\,u$$

$$\int \frac{c}{\sqrt{a-bx^2}}dx = A\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = arc\,sen\ldots.$$

Ejemplo 1:

$$\int \frac{2}{4+9x^2}dx$$

Todas las integrales con esta estructura son arc tg.
Hay que seguir los pasos para conseguirlo

- Sacamos el 2:

$$\int \frac{2}{4+9x^2}dx = 2\int\frac{1}{4+9x^2}dx =$$

- Dividimos todo por 4
  y volvemos a sacar:

$$=2\int\frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{4}+\frac{9x^2}{4}}dx = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{1+\frac{9x^2}{4}}dx =$$

- Metemos todo el monomio de *x* en un cuadrado

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}dx =$$

Ya tenemos $\int \frac{1}{1+u^2}$, nos falta conseguir *du*

$$du = \frac{3}{2}$$

- du = 3/2 . Multiplicamos fuera por 2/3 y metemos 3/2

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\int\frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\int\frac{du}{1+u^2}\right] = \frac{1}{3}arc\,tg\left(\frac{3x}{2}\right)+K$$

Ejemplo 2:

$$\int \frac{-3}{2+5x^2}dx$$

Todas las integrales con esta estructura son arc tg.
Hay que seguir los pasos para conseguirlo

- Sacamos el –3:

$$\int \frac{-3}{2+5x^2}dx=-3\int \frac{1}{2+5x^2}dx=$$

- Dividimos todo por 2
  y volvemos a sacar:

$$=-3\int \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{2}+\frac{5x^2}{2}}dx=-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{1+\frac{5x^2}{2}}dx=$$

- Metemos todo el monomio de *x* en un cuadrado

$$=\frac{-3}{2}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx=$$

Ya tenemos $\int \frac{1}{1+u^2}$, nos falta conseguir *du*

$$du=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

- Multiplicamos fuera por √2/√5 y metemos √5/√2

$$=\frac{-3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\int \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx=\left[\frac{-3}{\sqrt{10}}\cdot\int \frac{du}{1+u^2}\right]=\frac{-3}{\sqrt{10}}arc\,tg\left(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}}\right)+K$$

Ejemplo 3:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-4x^2}}\,dx$$

Todas las integrales con esta estructura son arc sen (o arc cos).
Hay que seguir los pasos para conseguirlo

$$du=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-4x^2}}\,dx=\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{2}{2}-\frac{4x^2}{2}}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{2}}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx=\rightarrow$$

$$\rightarrow=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx=\frac{1}{2}\,arc\,sen\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\,arc\,sen\left(\sqrt{2}\,x\right)+K$$

4. Integrales por cambio de variable

Se cambia alguna de las funciones que intervienen en una integral para llegar a otra que pueda calcularse.
Es un método de "prueba y error". Se trata de pensar algún cambio, aplicarlo, y ver qué pasa.

1. $$\int \cos x \, sen^3 x \, dx = \left[\begin{array}{c} u = sen\, x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right] = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} = \frac{sen^4 x}{4} + K$$

Se cambia x por u.
Este cambio debe ser completo, no puede quedar x, solo u

casi siempre se usa la letra t, pero nosotros usaremos la u

2. $$\int 4x(3x^2+5)\, dx = \left[\begin{array}{c} u = 3x^2+5 \\ du = 6x\, dx \end{array} \right] = \frac{4}{6} \int u\, du = \frac{u^2}{2} = \frac{(3x^2+5)^2}{2} + K$$

3. $$\int \sqrt{5x+3}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = 5x+3 \\ du = 5\, dx \end{array} \right] = \frac{1}{5} \int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{5} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{15} \sqrt{5x+3^3} + K$$

Con estos ejemplos se puede pensar que esto es algo que ya se sabe hacer, que son integrales casi-inmediatas. Pero el método resuelve otros casos más complejos:

4. $$\int x^2 \sqrt{x+1}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \sqrt{x+1} \\ u^2 = x+1 \;\rightarrow\; x = u^2 - 1 \\ 2u\, du = dx \end{array} \right] = \int (u^2-1)^2 \cdot u \cdot 2u\, du = 2 \cdot \int (u^2-1)^2 \cdot u^2\, du =$$

$$= \int (u^4 - 2u^2 + 1) \cdot u^2\, du = \int (u^6 - 2u^4 + u^2)\, du = \frac{u^7}{7} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} = \frac{\sqrt{x+1}^7}{7} - 2\frac{\sqrt{x+1}^5}{5} + \frac{\sqrt{x+1}^3}{3} =$$

4. $$=\frac{(x+1)^3\sqrt{x+1}}{7}-2\frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5}+\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3}+K$$

5. $$\int\frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}}dx=\left[\begin{array}{c} u=\sqrt{1+2x} \\ u^2=1+2x \;\rightarrow\; x=\dfrac{u^2-1}{2} \\ 2u\,du=2\,dx \;\rightarrow u\,du=dx \end{array}\right]=\int\frac{5\left(\dfrac{u^2-1}{2}\right)^4}{u}u\,du=5\cdot\int\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^4du=$$

$$=5\cdot\int\left(\frac{u^8-4u^6+6u^4-4u^2+1}{16}\right)du=\frac{5}{16}\cdot\left(\frac{u^9}{9}-4\frac{u^7}{7}+6\frac{u^5}{5}-4\frac{u^3}{3}+u\right)=\ldots.$$

6. $$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\left[\begin{array}{c} u=e^x \;\rightarrow\; \dfrac{1}{u}=e^{-x} \\ du=e^x\,dx \;\rightarrow\; \dfrac{du}{u}=dx \end{array}\right]=\int\frac{\dfrac{du}{u}}{u+\dfrac{1}{u}}=\int\frac{\dfrac{1}{u}}{\dfrac{u^2+1}{u}}du=\int\frac{1}{u^2+1}du=$$

$$=\ arc\,tg\,u=arc\,tg\,e^x+K$$

6. Integrales definidas

- Integral indefinida: $\int f(x)\,dx = F(x) + K$
- Integral definida: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

integral entre *a* y *b* de *f*

Ejemplo 1:

$$\int (2x - x^3)\,dx = x^2 - \frac{x^4}{4} + K$$

$$\int_2^4 (2x - x^3)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_2^4 = (4^2 - \frac{4^4}{4}) - (2^2 - \frac{2^4}{4}) = -48 - 0 = -48$$

$$\int_{-2}^0 (2x - x^3)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^0 = (0^2 - \frac{0^4}{4}) - ((-2)^2 - \frac{(-2)^4}{4}) = 0 - 0 = 0$$

Ejemplo 2:

$$\int \frac{\ln(x+e)}{x+e}\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x+e) \\ du = \dfrac{1}{x+e}\,dx \end{bmatrix} = \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{\ln^2(x+e)}{2} + K$$

$$\int_0^e \frac{\ln(x+e)}{x+e}\,dx = \left[\frac{\ln^2(x+e)}{2}\right]_0^e = \frac{\ln^2(2e)}{2} - \frac{\ln^2(e)}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

7. Áreas de recintos entre curvas

7.1. Área comprendida de la región comprendida entre: una curva, el eje X y dos abcisas

El enunciado del ejercicio sería:

“ Calcular el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y el *eje X* , entre $x = a$, $x = b$ ”

Pueden darse tres situaciones:

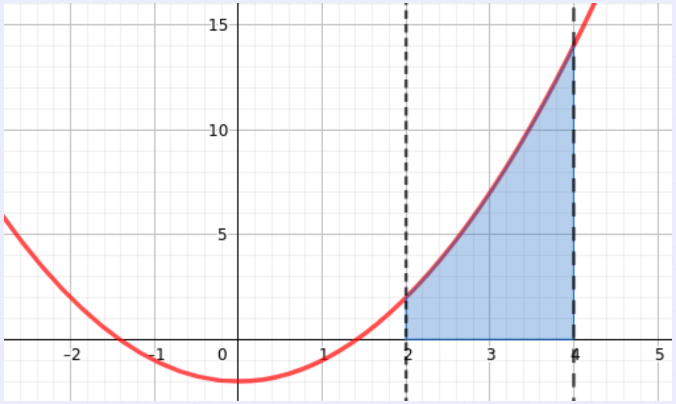
- Toda la curva es positiva
- Toda la curva es negativa
- Hay partes positivas y partes negativas

Para distinguir cada caso hay que:

- Calcular los puntos de corte con el *eje X*
- Calcular *f(a)* y *f(b)*
- Representar la región usando lo anterior

Ejemplo 1: Calcular el área de la región encerrada entre la curva $y = x^2 - 2$, el *eje X* , y las abcisas $x = 2$ y $x = 4$

- Calculamos los puntos de corte con el eje X: $x^2-2=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}\simeq\pm 1{,}41$
- Calculamos f(2) y f(4): $f(2)=2 \;\; ; \;\; f(4)=14$
- Representamos:



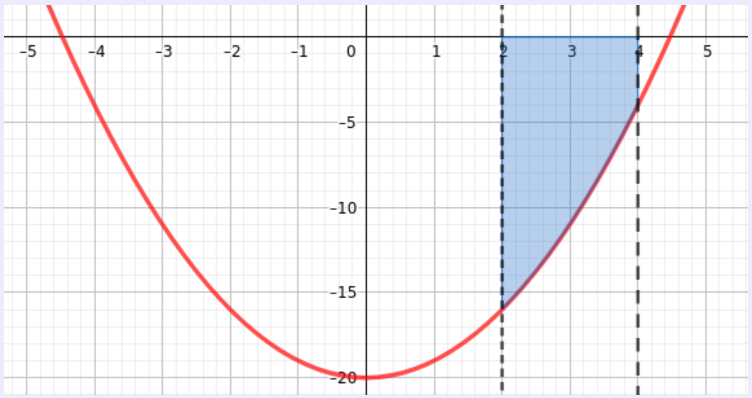
- Toda la curva es positiva

$$\boxed{\text{Área: } A=\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\text{Área: } A=\int_2^4 (x^2-2)\,dx=\frac{44}{3} \quad ud^2$$

Ejemplo 2: Calcular el área de la región encerrada entre la curva $y = x^2 - 20$, el *eje X*, y las abcisas $x = 2$ y $x = 4$

- Calculamos los puntos de corte con el eje X: $x^2 - 20 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{20} \simeq \pm 4{,}47$
- Calculamos f(2) y f(4): $f(2) = -16 \;\; ; \;\; f(4) = -4$
- Representamos:

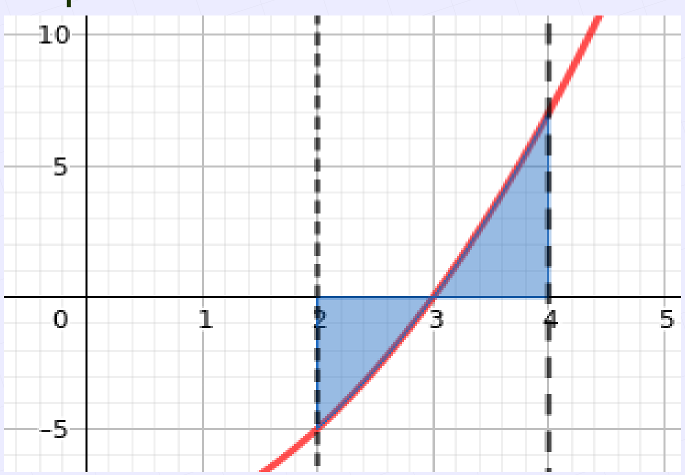


- Toda la curva es negativa $\boxed{\text{Área: } A = -\int_a^b f(x)\,dx}$

$$\text{Área: } A = -\int_2^4 (x^2 - 20)\,dx = \frac{64}{3} \;\; ud^2$$

Ejemplo 3: Calcular el área de la región encerrada entre la curva $y = x^2 - 9$, el *eje X*, y las abcisas $x = 2$ y $x = 4$

- Calculamos los puntos de corte con el eje X: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \simeq \pm 3$
- Calculamos f(2) y f(4): $f(2) = -5 \;\; ; \;\; f(4) = 7$
- Representamos:



- Hay partes positivas y partes negativas: se hace por trozos

$$\text{Área: } A = A_1 + A_2 = -\int_2^3 (x^2 - 9)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 9)\,dx = \;6 \;\; ud^2$$

7.2. Área de la región comprendida entre dos curvas

El enunciado del ejercicio sería:

" Calcular el área de la región encerrada entre las curvas *f(x)* y g(x) entre $x = a$, $x = b$ "

Pueden darse tres situaciones:

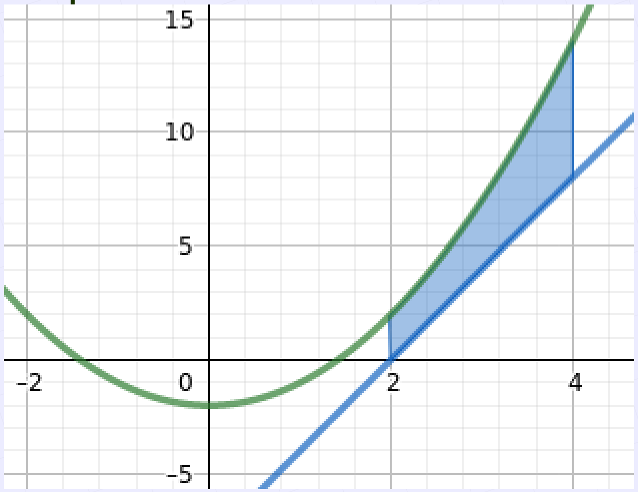
- Toda la curva *f* está por encima de la *g*
- Toda la curva *g* está por encima de la *f*
- Las curvas se cruzan

Para distinguir cada caso hay que:

- Calcular los puntos de corte entre las curvas
- Calcular *f(a)* y *f(b)* , *g(a)* y *g(b)*. Puede ser necesario algún punto más
- Representar la región usando lo anterior

Ejemplo 4: Calcular el área de la región encerrada entre las curvas $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 4x - 8$, y las abcisas $x = 2$ y $x = 4$

- Calculamos los puntos de corte entre las curvas: $x^2-2=4x-8 \rightarrow x = No\ solución$
- Calculamos f(2) y f(4) , g(2) y g(4): $f(2)=2\ ;\ f(4)=14\ ;\ g(2)=0\ ;\ g(4)=8$
- Representamos:



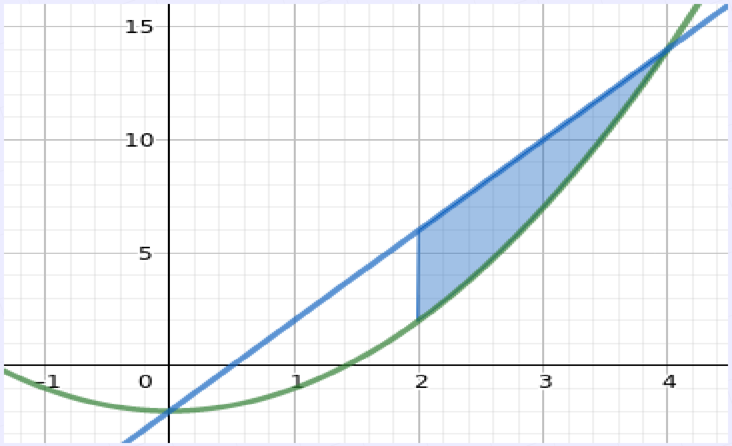
- *f* está por encima de *g*

$$\boxed{\text{Área: } A=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx}$$

$$\text{Área: } A=\int_2^4 (x^2-4x+6)\,dx=\frac{20}{3}\ ud^2$$

Ejemplo 5: Calcular el área de la región encerrada entre las curvas *f(x) = x² – 2* , *g(x) = 4x – 2* , y las abcisas *x = 2* y *x = 4*

- Calculamos los puntos de corte entre las curvas: $x^2-2=4x-2 \rightarrow x=0 \ , \ x=4$
- Calculamos f(2) y f(4) , g(2) y g(4): $f(2)=2 \ ; \ f(4)=14 \ ; \ g(2)=6 \ ; \ g(4)=14$
- Representamos:



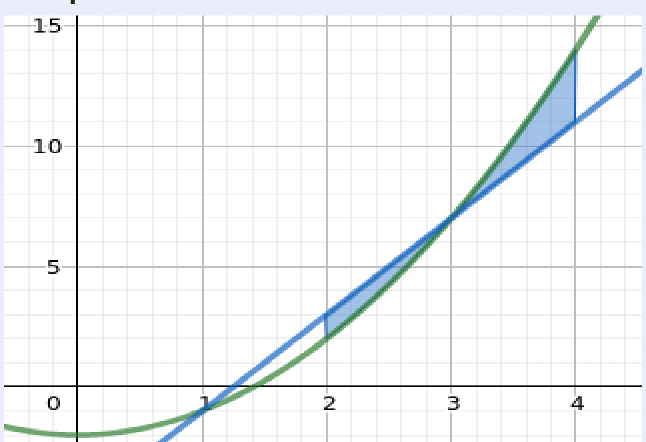
- *g* está por encima de *f*

$$\text{Área: } A=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$

$$\text{Área: } A=\int_2^4 (4x-x^2)\,dx=\frac{16}{3} \ ud^2$$

Ejemplo 6: Calcular el área de la región encerrada entre las curvas *f(x) = x² – 2* , *g(x) = 4x – 5* , y las abcisas *x = 2* y *x = 4*

- Calculamos los puntos de corte entre las curvas: $x^2-2=4x-5 \rightarrow x=1 \ , \ x=3$
- Calculamos f(2) y f(4) , g(2) y g(4) , f(3): $f(2)=2 \ ; \ f(4)=14 \ ; \ g(2)=3 \ ; \ g(4)=11 \ ; \ f(3)=7$
- Representamos:

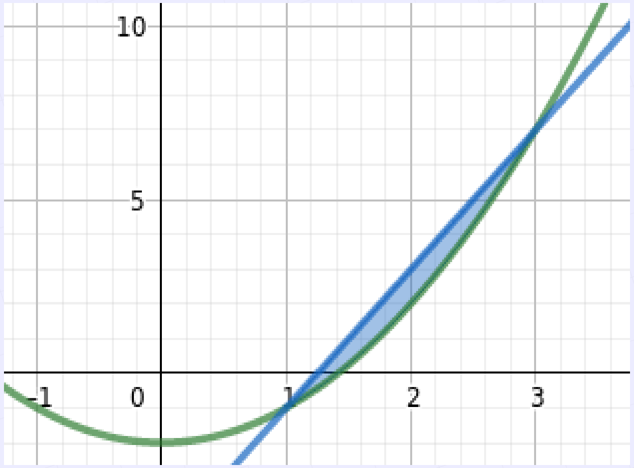


- Las curvas se cruzan. Se hace por trozos

$$\text{Área: } A=A_1+A_2=\int_2^3 (-x^2+4x+3)\,dx+\int_3^4 (x^2-4x+3)\,dx=2 \ ud^2$$

Ejemplo 7: Calcular el área de la región encerrada entre las curvas $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 4x - 5$

- Calculamos los puntos de corte entre las curvas: $x^2 - 2 = 4x - 5 \rightarrow x = 1 \;,\; x = 3$
- Calculamos f(1) , f(3) : $f(1) = -1 \;;\; f(3) = 7$
- Para representar puede venir bien un punto más: f(2) , g(2): $f(2) = 2 \;;\; g(2) = 3$
- Representamos



- *g* está por encima de *f*

$$\text{Área: } A = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

$$\text{Área: } A = \int_1^3 (4x - x^2)\,dx = \frac{4}{3} \;\; ud^2$$