

Tema 8: Funciones: representaciones gráficas

Vamos a hacer representaciones gráficas haciendo un estudio completo de cada función. Seguiremos los siguientes pasos:

1. Dominio
2. Cortes con los ejes de coordenadas
3. Asíntotas
4. Monotonía: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos
5. Curvatura: concavidad, convexidad, puntos de inflexión
6. Representación y puntos y asíntotas. Representación de la gráfica

1. Funciones polinómicas

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

1. Dominio: es una polinómica, por tanto: $Dom(f) = \mathbb{R}$

2. Cortes con los ejes de coordenadas:

- Eje Y: $x=0 \rightarrow y=4 \rightarrow$ Punto $(0,4)$
- Eje X: $y=0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 4x = 0 \rightarrow x=2 ; x=-1 \rightarrow$ Puntos $(2,0) (-1,0)$

Ruffini

3. Asíntotas

- Verticales: es polinómica, no tiene
- Horizontales: es polinómica, no tiene. Pero para la representación debemos hacer los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

4. Monotonía: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

4.1. Hacemos la derivada: $f'(x)$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 3x^1 + 0$$

Los exponentes 'saltan delante' multiplicando

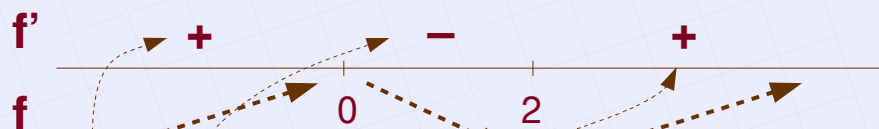
las 'x' se elevan a un grado menos

la derivada de un número es 0

Simplificando: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

4.2. Igualamos la derivada a 0 y resolvemos $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0 \quad x = 2$

4.3. Estudiamos los intervalos de monotonía, teniendo en cuenta el dominio



Elegimos un valor de cada intervalo y se sustituye en la derivada

$$f'(-1) = +9 \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

$$f'(1) = -3 \rightarrow f' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ decreciente}$$

$$f'(3) = +9 \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

Resultado: f es creciente el intervalo $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$

f es decreciente el intervalo $(0, 2)$

f tiene un máximo relativo en $x = 0$; $y = 4$

f tiene un mínimo relativo en $x = 2$; $y = 0$

5. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión

5.1. Hacemos la derivada segunda: $f''(x)$ (derivada de la derivada)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x^1 \rightarrow f''(x) = 2 \cdot 3x^1 - 1 \cdot 6x^0$$

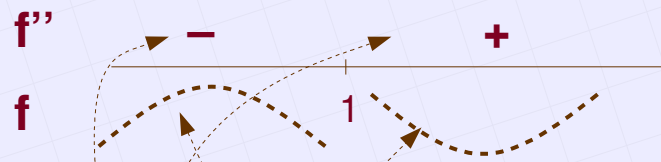
Los exponentes 'saltan delante' multiplicando

las 'x' se elevan a un grado menos

Simplificando: $f''(x) = 6x - 6$

5.2. Igualamos la derivada segunda a 0 y resolvemos $f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

5.3. Estudiamos los intervalos de curvatura, teniendo en cuenta el dominio



Elegimos un valor de cada intervalo y se sustituye en la derivada

$$f''(0) = -6 \rightarrow f'' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ cóncava}$$

$$f''(2) = 6 \rightarrow f'' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ convexa}$$

Resultado: f es cóncava el intervalo $(-\infty, 1)$

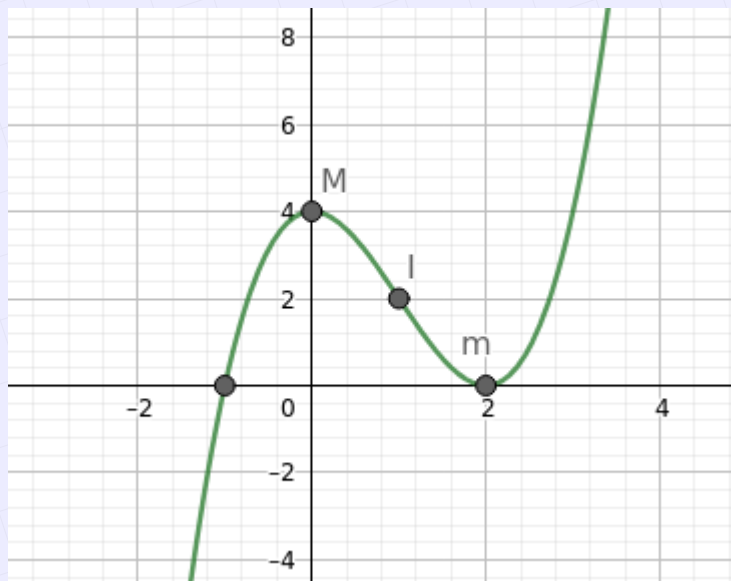
f es convexa el intervalo $(1, +\infty)$

f tiene un punto de inflexión en $x = 1$; $y = 2$

6. Tabla y representación



x	y	
0	4	Máx
2	0	mín
-1	0	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
1	2	P Inflex



$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100$$

1. Dominio: es una polinómica, por tanto: $Dom(f) = \mathbb{R}$

2. Cortes con los ejes de coordenadas:

- Eje Y: $x=0 \rightarrow y=100 \rightarrow$ Punto $(0, 100)$
- Eje X: $y=0 \rightarrow 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100 = 0$

Se haría por Ruffini, pero no se encuentran soluciones. No se hace

3. Asíntotas

- Verticales: es polinómica, no tiene
- Horizontales: es polinómica, no tiene. Pero para la representación debemos hacer los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

4. Monotonía: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

4.1. Hacemos la derivada: $f'(x)$

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot 3x^3 + 3 \cdot 4x^2 - 2 \cdot 36x^1 + 0$$

Los exponentes 'saltan delante' multiplicando

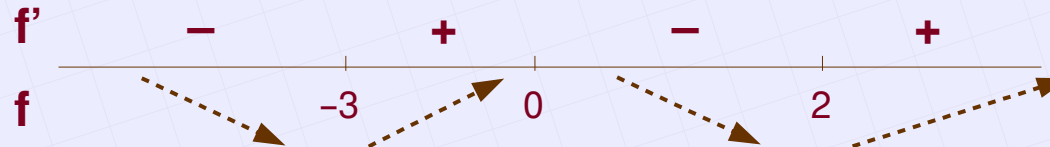
las 'x' se elevan a un grado menos

la derivada de un número es 0

Simplificando: $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

4.2. Igualamos la derivada a 0 y resolvemos $f'(x) = 0 \rightarrow 12x^3 + 12x^2 - 72x = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \\ x=2 \end{cases}$

4.3. Estudiamos los intervalos de monotonía, teniendo en cuenta el dominio



Elegimos un valor de cada intervalo y se sustituye en la derivada

$$f'(-4) = -288 \rightarrow f' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ decreciente}$$

$$f'(-1) = 72 \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

$$f'(1) = -48 \rightarrow f' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ decreciente}$$

$$f'(3) = 216 \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

Resultado: f es decreciente el intervalo $(-\infty, -3)$ y en $(0, 2)$

f es creciente el intervalo $(-3, 0)$ y en $(2, +\infty)$

f tiene un máximo relativo en $x = 0$; $y = 100$

f tiene un mínimo relativo en $x = -3$; $y = -89$ y otro en $x = 2$; $y = 36$

5. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión

5.1. Hacemos la derivada segunda: $f''(x)$ (derivada de la derivada)

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x \rightarrow f''(x) = 3 \cdot 12x^2 + 2 \cdot 12x^1 - 72x^0$$

Los exponentes 'saltan delante' multiplicando

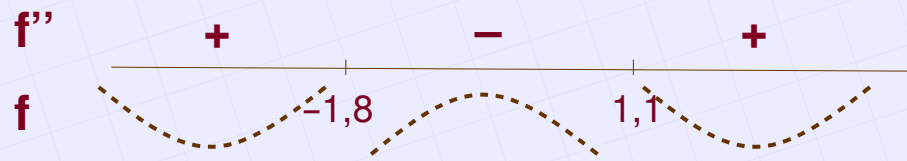
las 'x' se elevan a un grado menos

Simplificando: $f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

5.2. Igualamos la derivada segunda a 0 y resolvemos $f''(x) = 0 \rightarrow 36x^2 + 24x - 72 = 0 \rightarrow$

$$\left\{ \frac{-\sqrt{19} - 1}{3}, \frac{\sqrt{19} - 1}{3} \right\} \rightarrow \begin{cases} x \simeq -1,8 \\ x \simeq 1,1 \end{cases}$$

5.3. Estudiamos los intervalos de curvatura, teniendo en cuenta el dominio



Elegimos un valor de cada intervalo y se sustituye en la derivada segunda

$$f''(-3) = 180 \rightarrow f'' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ convexa}$$

$$f''(0) = -72 \rightarrow f'' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ cóncava}$$

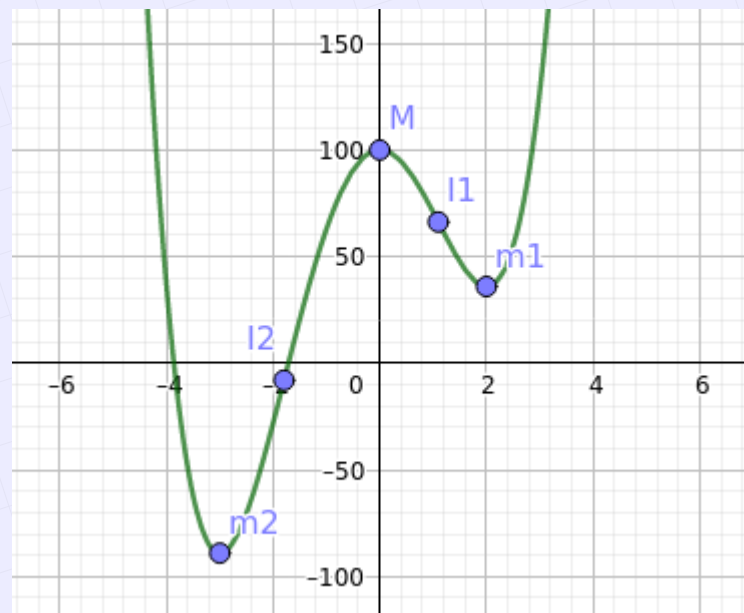
$$f''(2) = 120 \rightarrow f'' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ convexa}$$

Resultado: f es convexa el intervalo $(-\infty ; -1,8)$ y en $(1,1 ; +\infty)$

f es cóncava el intervalo $(-1,8 ; 1,1)$

f tiene un punto de inflexión en $x = -1,8 ; y = -7,1$ y otro en $x = 1,1 ; y = 65,2$

x	y	
0	100	Máx
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
-3	-89	mín
2	36	mín
-1,8	-7,1	P Inflex
1,1	65,2	P Inflex



2. Funciones racionales

En cualquier tipo de función hay que seguir los mismos pasos que hemos hecho anteriormente

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

1. Dominio: es una racional, el denominador no puede ser 0: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

2. Cortes con los ejes de coordenadas:

- Eje Y: $x=0 \rightarrow y=\nexists$
- Eje X: $y=0 \rightarrow \frac{1-x}{x^2}=0 \rightarrow 1-x=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \text{Punto } (1,0)$

3. Asíntotas

- Verticales: Puede haber en 0 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{1}{0}\right) = \pm \infty$ Asíntota V.: $x = 0$
- Horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ Asíntota H.: $y = 0$

4. Monotonía: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

4.1. Hacemos la derivada: $f'(x)$

La función es un cociente. Para hacer la derivada hay que usar una fórmula:

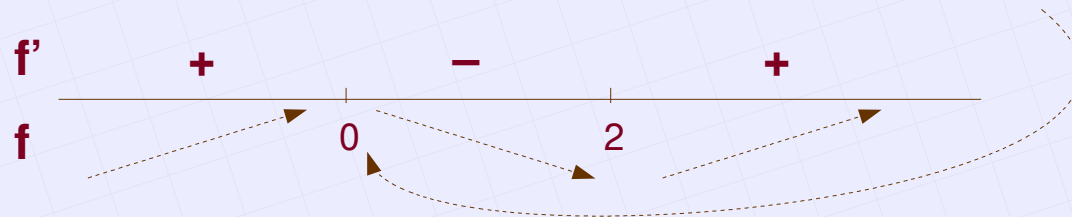
$$f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{\overset{u}{1-x}}{\underset{v}{x^2}} \rightarrow f'(x) = \frac{\overset{u'}{(0-1x^0)} \cdot \overset{v}{(x^2)} - \overset{u}{(1-x)} \cdot \overset{v'}{(2x^1)}}{\underset{v^2}{(x^2)^2}}$$

Simplificando: $f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2x^2}{x^4} = \frac{-2x + x^2}{x^4} = \frac{x(-2 + x)}{x^4} = \frac{-2 + x}{x^3}$

4.2. Igualamos la derivada a 0 y resolvemos $f'(x)=0 \rightarrow -2+x=0 \rightarrow x=2$

4.3. Estudiamos los intervalos de monotonía, teniendo en cuenta el dominio



Elegimos un valor de cada intervalo y se sustituye en la derivada

$$f'(-1)=3 \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

$$f'(1)=-1 \rightarrow f' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ decreciente}$$

$$f'(3)=\frac{1}{27} \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

Resultado: f es creciente el intervalo $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$

f es decreciente el intervalo $(0, 2)$

f no tiene máximos (en $x=0$ no hay punto, hay asíntota)

f tiene un mínimo en $x=2$, $y=-\frac{1}{4}$

5. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión

5.1. Hacemos la derivada segunda: $f''(x)$ (derivada de la derivada)

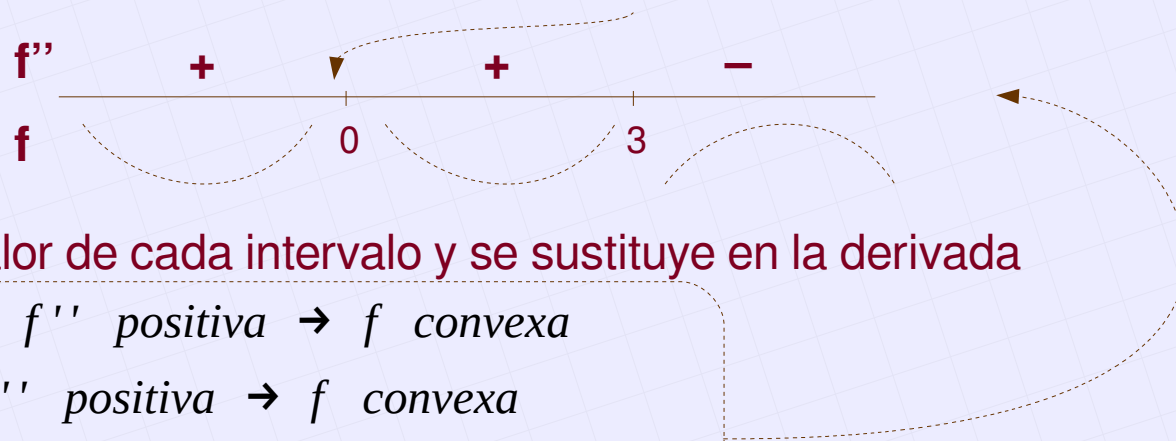
De nuevo es un cociente, hay que usar la fórmula de antes

$$f'(x) = \frac{\overset{u}{-2+x}}{\underset{v}{x^3}} \rightarrow f''(x) = \frac{(\overset{u'}{0+1x^0}) \cdot (\overset{v}{x^3}) - (\overset{u}{-2+x}) \cdot (\overset{v'}{3x^2})}{(\overset{v^2}{x^3})^2}$$

Simplificando: $f''(x) = \frac{x^3 + 6x^2 - 3x^3}{x^4} = \frac{6x^2 - 2x^3}{x^6} = \frac{x^2(6-2x)}{x^6} = \frac{6-2x}{x^4}$

5.2. Igualamos la derivada a 0 y resolvemos $f''(x)=0 \rightarrow 6-2x=0 \rightarrow x=3$

5.3. Estudiamos los intervalos de curvatura, teniendo en cuenta el dominio



Elegimos un valor de cada intervalo y se sustituye en la derivada

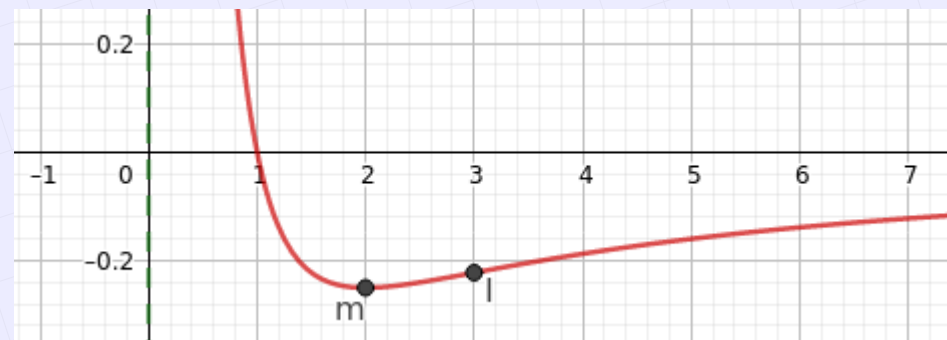
$$f''(-1)=8 \rightarrow f'' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ convexa}$$

$$f''(1)=4 \rightarrow f'' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ convexa}$$

$$f''(4)=\frac{-1}{128} \rightarrow f'' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ cóncava}$$

Resultado: f es convexa el intervalo $(-\infty, 0)$ y en $(0, 3)$
 f es cóncava en el intervalo $(3, +\infty)$
 f tiene un punto de inflexión en $x = 3, y = -2/9$

x	y	
0	$\pm\infty$	AV
1	0	
$-\infty$	0	AH
$+\infty$	0	AH
2	$-\frac{1}{4}$	mín
3	$-\frac{1}{9}$	P Infix



$$f(x) = \frac{4-2x^2}{1-x}$$

1. Dominio: es una racional, el denominador no puede ser 0: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

2. Cortes con los ejes de coordenadas:

- Eje Y: $x=0 \rightarrow y=4$
- Eje X: $y=0 \rightarrow \frac{4-2x^2}{1-x}=0 \rightarrow 4-2x^2=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{2} \rightarrow$ Puntos $(-\sqrt{2},0)$ y $(\sqrt{2},0)$

3. Asíntotas

- Verticales: Puede haber en 1 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left(\frac{2}{0}\right) = \pm\infty$ Asíntota V.: $x = 1$
- Horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ No hay asíntota H
- Oblicuas: $\frac{f(x)}{x} = \frac{4-2x^2}{x-x^2} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \rightarrow m=2$
 $f(x) - mx = \frac{4-2x^2}{1-x} - 2x = \frac{4-2x^2-2x+2x^2}{1-x} = \frac{4-2x}{1-x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = 2 \rightarrow n=2$
 Asíntota O.: $y = 2x + 2$

4. Monotonía: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

4.1. Hacemos la derivada: $f'(x)$

La función es un cociente. Para hacer la derivada hay que usar una fórmula:

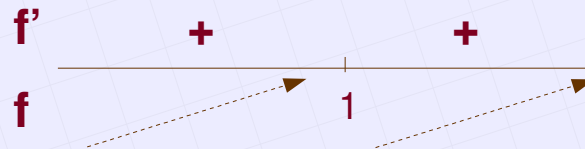
$$f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{\overset{u}{4-2x^2}}{\underset{v}{1-x}} \rightarrow f'(x) = \frac{\overset{u'}{(0-4x^1)} \cdot \overset{v}{(1-x)} - \overset{u}{(4-2x^2)} \cdot \overset{v'}{(0-1x^0)}}{\underset{v^2}{(1-x)^2}}$$

Simplificando: $f'(x) = \frac{-4x + 4x^2 + 4 - 2x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 4}{(1-x)^2}$ no se desarrolla

4.2. Igualamos la derivada a 0 y resolvemos $f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 1$

4.3. Estudiamos los intervalos de monotonía, teniendo en cuenta el dominio



Elegimos un valor de cada intervalo y se sustituye en la derivada

$$f'(0) = 4 \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

$$f'(2) = 4 \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

Resultado: f es creciente el intervalo $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$
 f no tiene máximos ni mínimos

5. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión
 Esta vez no lo hacemos. Tiene muchas operaciones

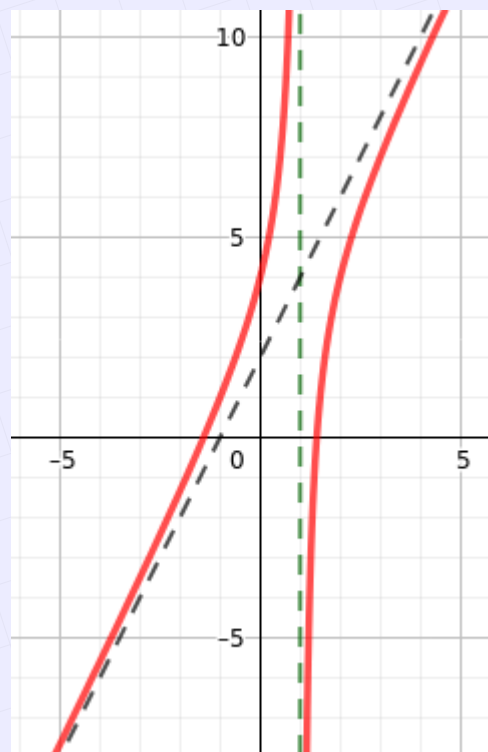
x	y
0	4
$-\sqrt{2}$	0
$\sqrt{2}$	0
1	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$

AV

$2x-2$

AO

x	y
0	-2
1	0



$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$$

1. Dominio: es una racional, el denominador no puede ser 0:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

2. Cortes con los ejes de coordenadas:

• Eje Y: $x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow \text{Punto } (0,0)$

• Eje X: $y=0 \rightarrow \frac{x^4}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x^4 = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow \text{Punto } (0,0)$

3. Asíntotas

• Verticales: Puede haber en ± 1

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \left(\frac{1}{0} \right) = \pm \infty$$

Asíntota V.: $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left(\frac{1}{0} \right) = \pm \infty$$

• Horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

No hay asíntota H

• Oblicuas: $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^4}{x^3 - x}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$$

No hay asíntota O

4. Monotonía: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

4.1. Hacemos la derivada: $f'(x)$

La función es un cociente. Para hacer la derivada hay que usar una fórmula:

$$f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{\overset{u}{x^4}}{\underset{v}{x^2-1}} \rightarrow f'(x) = \frac{\overset{u'}{4x^3} \cdot \overset{v}{(x^2-1)} - \overset{u}{x^4} \cdot \overset{v'}{(2x-0)}}{\underset{v^2}{(x^2-1)^2}}$$

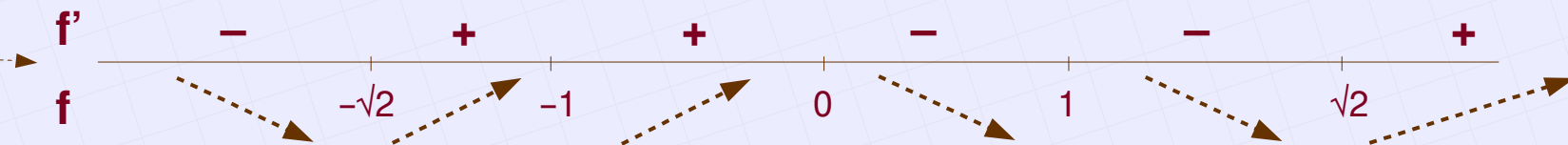
Simplificando: $f'(x) = \frac{4x^5 - 4x^3 - 2x^5}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^5 - 4x^3}{(x^2-1)^2}$

no se desarrolla

factor común y grado 2

4.2. Igualamos la derivada a 0 y resolvemos $f'(x)=0 \rightarrow 2x^5 - 4x^3 = 0 \rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}$

4.3. Estudiamos los intervalos de monotonía, teniendo en cuenta el dominio



Elegimos un valor de cada intervalo y se sustituye en la derivada

$$f'(-2) = \frac{-32}{9} \rightarrow f' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ decreciente}$$

$$f'(-1,2) \simeq 10 \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

$$f'(-0,5) = \frac{7}{9} \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

$$f'(0,5) = \frac{-7}{9} \rightarrow f' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ decreciente}$$

$$f'(1,2) \simeq -10 \rightarrow f' \text{ negativa} \rightarrow f \text{ decreciente}$$

$$f'(2) = \frac{-32}{9} \rightarrow f' \text{ positiva} \rightarrow f \text{ creciente}$$

Resultado: f es decreciente el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2})$, en $(0, 1)$ y en $(1, \sqrt{2})$
 f es creciente el intervalo $(-\sqrt{2}, -1)$, en $(-1, 0)$ y en $(\sqrt{2}, +\infty)$
 f tiene un máximo relativo en $x = 0$; $y = 0$
 f tiene un mínimo relativo en $x = -\sqrt{2}$; $y = 4$ y otro en $x = \sqrt{2}$; $y = 4$

5. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión
Esta vez no lo hacemos. Tiene muchas operaciones

