Tema 6: Funciones: límites, asíntotas y continuidad

1. Límites en funciones elementales:
   - Constantes
   - Polinómicas
   - Racionales
     - Intederminaciones $(0 \cdot \infty)$; $(\infty - \infty)$
   - Radicales
   - Exponenciales y logarítmicas
   - Trigonométricas.
2. Asíntotas de una función.
3. Continuidad de una función.

Ejemplo introductorio:

$$f(x)=\frac{x^2+4x-45}{x^2-25}$$

geogebra

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{9}{5} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to -5} f(x)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 5} f(x)=\frac{7}{5}$$

1.1. Límites en funciones constantes

$f(x)=k$ El resultado en cualquier límite es **k**

$f(x)=-4$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x)=-4 \;;\; \lim_{x\to 2} f(x)=-4 \;;\; \lim_{x\to \pm\infty} f(x)=-4 \;;$

1.2. Límites en funciones polinómicas

$f(x)$: **polinomio** $\quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \;;\; \lim_{x\to \pm\infty} f(x)=+\infty \;\; o \;\; -\infty$

$f(x)=3x^3-5x$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x)=0 \;;\; \lim_{x\to 2} f(x)=14 \;;\; \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \;;\; \lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

$g(x)=3x-3x^2$ $\quad \lim_{x\to 0} g(x)=0 \;;\; \lim_{x\to 2} g(x)=-6 \;;\; \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty \;;\; \lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

1.3. Límites en funciones racionales. Indeterminaciones

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

$\lim_{x\to a} f(x)$ Se sustituye *a* en la fracción. Puede salir:

→ $\frac{a}{b}$ → (No hay indeterminación. Terminado)

→ $\frac{a}{0}$ → $(\pm\infty)$ → (Indeterminación solo en el signo)

Hay que hacer límites laterales para decidir el signo

→ $\frac{0}{0}$ → $(Indeterminación)$

Hay que simplificar la fracción y volver a empezar

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ → $(Indeterminación)$

Se comparan los grados del numerador y del denominador. Puede salir:

→ Si gr (p) > gr (q) → $\pm\infty$ → El signo se calcula en cada ejercicio

→ Si gr (p) < gr (q) → 0

→ Si gr (p) = gr (q) → $\frac{a_1}{a_2}$ (se dividen los coeficientes principales de p y q)

$$f(x)=\frac{3x^3-5x}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{14}{2}=7$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\left(\frac{-2}{0}\right)=\pm\infty$$ → Hay que hacer límites laterales para decidir el signo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\left(\frac{-2}{-0}\right)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\left(\frac{-2}{+0}\right)=-\infty$$

$$f(x)=\frac{3x^3-5x}{x^2-x}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\left(\frac{0}{0}\right)$ → Hay que simplificar la fracción y volver a empezar

En la fracción se saca factor común y se simplifica: $f(x)=\frac{x(3x^2-5)}{x(x-1)}=\frac{3x^2-5}{x-1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5}{x-1}=5$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=+\infty$, porque el grado del numerador es mayor.

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=-\infty$, porque el grado del numerador es mayor.

$$f(x)=\frac{2-x}{x^2-4}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{-1}{2}$

$\lim_{x\to -2} f(x)=\left(\frac{4}{0}\right)=\pm\infty$ → Hay que hacer límites laterales para decidir el signo

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\left(\frac{+4}{+0}\right)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -2^+} f(x)=\left(\frac{+4}{-0}\right)=-\infty$$

$\lim_{x\to 2} f(x)=\left(\frac{0}{0}\right)$ → Hay que simplificar la fracción y volver a empezar

En la fracción se descompone el denominador (producto notable) y se simplifica:

$$f(x)=\frac{2-x}{(x+2)(x-2)}=\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{-1}{(x+2)} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{-1}{x+2}=\frac{-1}{4}$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=0$, porque el grado del numerador es menor.

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=0$, porque el grado del numerador es menor.

1.3.a. Límites en funciones racionales. Indeterminaciones (0·∞) , (∞ – ∞)

Si en un ejercicio tenemos una de estas indeterminaciones hay que hacer la operación que las provoca para resolverlas

$$f(x)=(x^2-4)\cdot\frac{2}{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-8$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=0\cdot\frac{2}{-3}=0 \qquad \lim_{x\to -2} f(x)=0\cdot\frac{2}{-3}=0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-3\cdot(\pm\infty)$$ → Hay que hacer límites laterales para decidir el signo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-3\cdot\left(\frac{2}{+0}\right)=-3\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-3\cdot\left(\frac{2}{-0}\right)=-3\cdot(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-3\cdot(\pm\infty)$$ → Hay que hacer límites laterales para decidir el signo

±∞·0

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=(+\infty)\cdot 0$$ → Hay que hacer la operación para resolver la indeterminación

$$f(x)=(x^2-4)\cdot\frac{2}{1-x^2}=\frac{2x^2-8}{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)=\frac{2}{-1}=-2$$

ya que tenemos el mismo grado en el numerador y denominador

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=(+\infty)\cdot 0$$ → Hay que hacer lo mismo que el anterior

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)=-2$$

$f(x)=x^2-\frac{2x^2}{1-x}$	$\lim_{x\to 0} f(x)=0-\frac{0}{1}=0$ $\lim_{x\to 2} f(x)=4-\frac{8}{-1}=12$ $\lim_{x\to -2} f(x)=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$ $\lim_{x\to 1} f(x)=1-\left(\frac{2}{0}\right)=1-(\pm\infty)$ → Hay que hacer límites laterales para decidir el signo $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1-(\frac{+2}{+0})=1-(+\infty)=-\infty$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1-(\frac{+2}{-0})=1-(-\infty)=+\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=(+\infty)-(-\infty)=+\infty$ → No hay indeterminación
$(+\infty)-(+\infty)$	$\lim_{x\to -\infty} f(x)=(+\infty)-(+\infty)$ → Ahora sí hay indeterminación. Hay que hacer la operación $f(x)=x^2-\frac{2x^2}{1-x}=\frac{x^2(1-x)-2x^2}{1-x}=\frac{x^2-x^3-2x^2}{1-x}=\frac{-x^3-x^2}{1-x}$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=+\infty$ ya que tenemos más grado en el numerador

1.4. Límites en funciones radicales.

$f(x)=\sqrt{x}$

$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}=\nexists$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x}=\nexists$

$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$

$f(x)=\sqrt{x^2-1}$

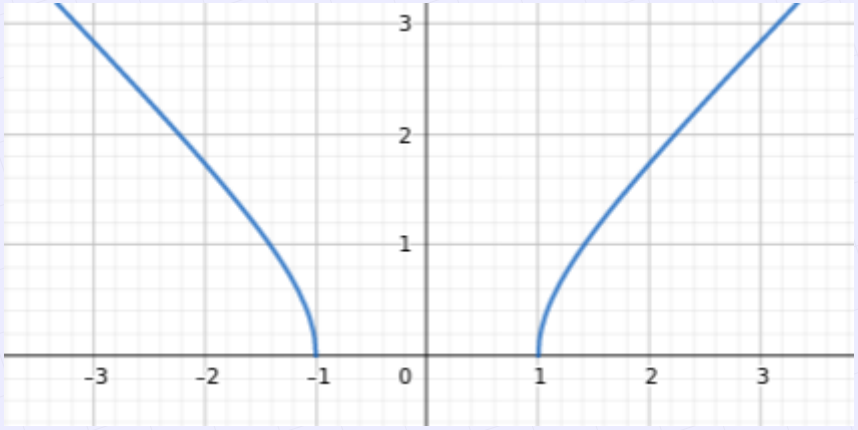
$\lim_{x\to 2} f(x)=\sqrt{3}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\nexists$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\nexists$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=0$ $\quad$ $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\nexists$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$



1.4.a. Límites en funciones radicales. Indeterminaciones $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$

Hay que hacer lo mismo que en las racionales: en el primer caso se comparan los 'grados', y en el segundo se simplifica la fracción:

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-16}}{x-4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)=-\frac{2}{1}=-2 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=+\frac{2}{1}=2$$

Al ser del mismo 'grado' se dividen los 'coeficientes'

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\frac{\sqrt{+0}}{-2}=0 \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x)=\frac{\sqrt{+0}}{-6}=0$$

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\left(\frac{\sqrt{48}}{0}\right)=\pm\infty$$ Hay que hacer límites laterales

$$\begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x)=\left(\frac{\sqrt{48}}{-0}\right)=-\infty \\ \lim_{x\to 4^+} f(x)=\left(\frac{\sqrt{48}}{+0}\right)=+\infty \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{x^2-16}{\sqrt{x-4}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\nexists \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

El 'grado' del numerador es mayor

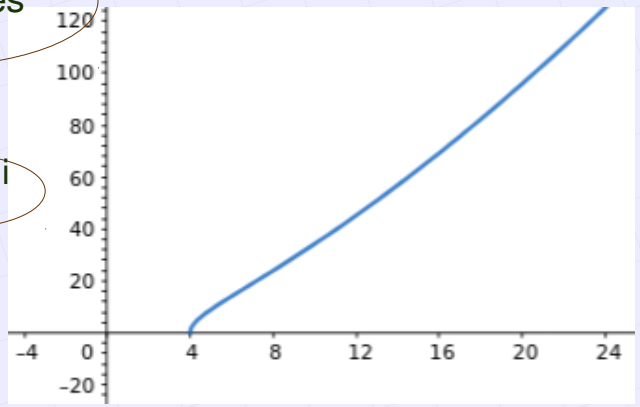
$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\left(\frac{0}{0}\right)$$ Hay que simplificar

producto notable

racionalizando

$$\frac{x^2-16}{\sqrt{x-4}}=\frac{(x+4)(x-4)}{\sqrt{x-4}}=\frac{(x+4)\sqrt{x-4}}{1}$$

$$\lim_{x\to 4^+}(x+4)\sqrt{x-4}=8\cdot 0=0$$



1.4.b. Límites en funciones radicales. Indeterminaciones (0·∞) , (∞ – ∞)

En el primer caso se hace la operación y se estudia después. En el segundo caso se comparan los ‘grados’. Si es necesario hay que ‘racionalizar’.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\nexists$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\nexists \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\cdot 1=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty\cdot(-1)=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \sqrt{x}=\nexists$$

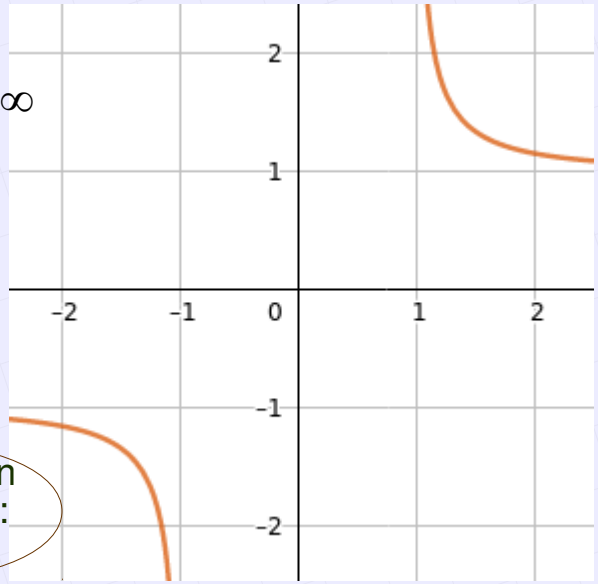
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=(0\cdot\pm\infty)$$ se hace la operación

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1}}=-1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

se comparan los ‘grados’: 1 y 1



$$f(x)=\sqrt{x^2-1}-x^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\nexists$$

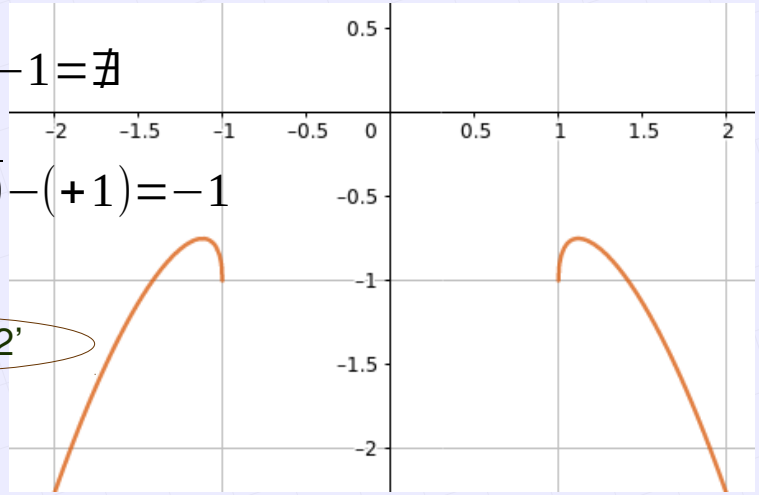
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\sqrt{+0}-1=-1 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\sqrt{-0}-1=\nexists$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\sqrt{-0}-1=\nexists \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x)=\sqrt{+0}-(+1)=-1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=(+\infty-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=(+\infty-\infty)=-\infty$$

‘grado 1 – grado 2’



$$f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\nexists$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=0-1=-1 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\nexists$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\nexists \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x)=0-(-1)=+1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=(+\infty-(-\infty))=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=(+\infty-\infty)=$$

Los 'grados' son iguales. Hay que racionalizar

Producto notable: diferencia de cuadrados

$$\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{+\infty++\infty}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

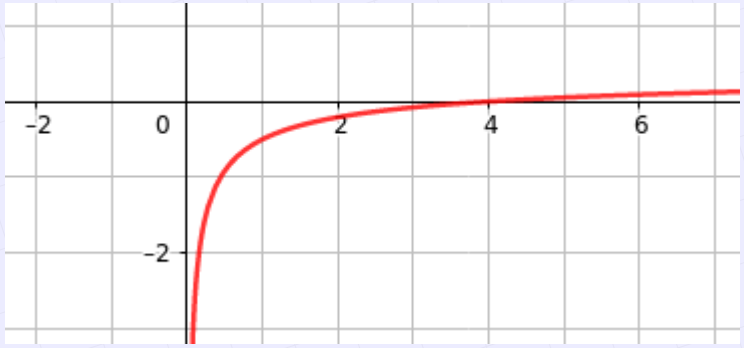
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{0}\right)=\frac{1}{2}-(\pm\infty)$$ hay que hacer laterales

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{-0}}\right)=\frac{1}{2}-(\nexists)=\nexists$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{+0}}\right)=\left(\frac{1}{2}-(+\infty)\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{-\infty}}\right)=\frac{1}{2}-(\nexists)=\nexists$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$



1.5. Límites en funciones exponenciales y logarítmicas.

- Base a > 1:

$f(x)=a^x$

$$\lim_{x\to 0} a^x=1$$

$$\lim_{x\to -\infty} a^x=0$$

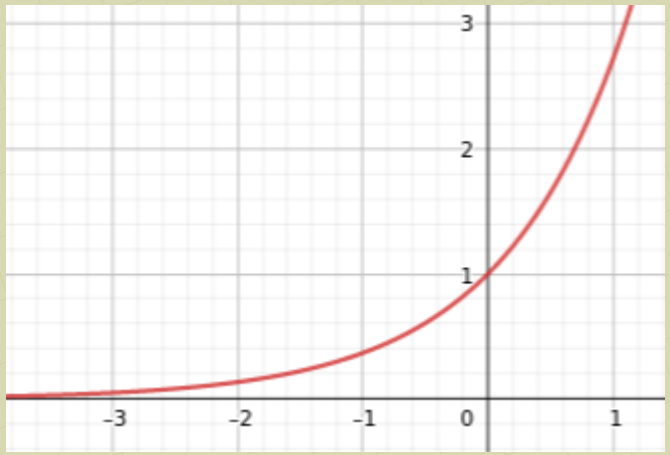
$$\lim_{x\to +\infty} a^x=+\infty$$

$f(x)=e^x$

$$\lim_{x\to 0} e^x=1$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x=0$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^x=+\infty$$



- Base a < 1

$f(x)=a^x$

$$\lim_{x\to 0} a^x=1$$

$$\lim_{x\to -\infty} a^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} a^x=0$$

$f(x)=e^{-x}$

$$\lim_{x\to 0} e^{-x}=1$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{-x}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{-x}=+\infty$$

- Base a > 1:

$f(x)=\log_a x$

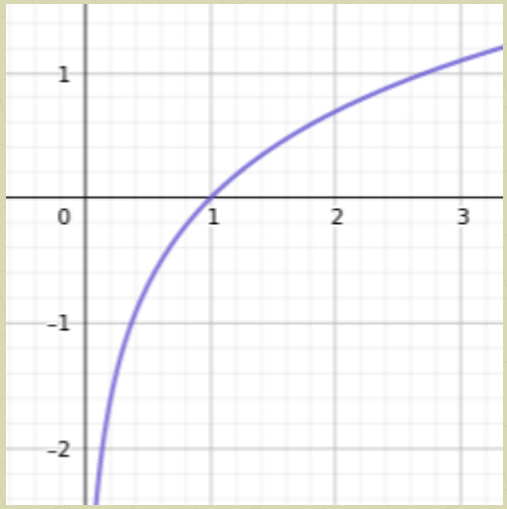
$\lim_{x\to 0^-} \log_a x = \nexists$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} \log_a x = \nexists$ $\quad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$

$f(x)=\ln x$

$\lim_{x\to 0^-} \ln x = \nexists$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} \ln x = \nexists$ $\quad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

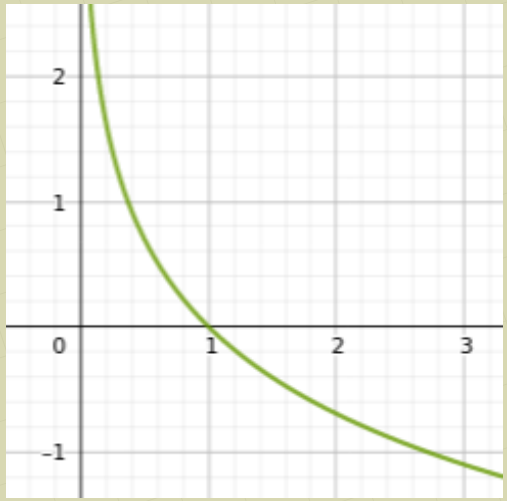


- Base a < 1

$f(x)=\log_a x$

$\lim_{x\to 0^-} \log_a x = \nexists$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} \log_a x = \nexists$ $\quad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$



$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to 1} f(x)=e^{1}=e(\simeq 2{,}7)$

$\lim_{x\to -1} f(x)=e^{-1}=\frac{1}{e}(\simeq 0{,}4)$

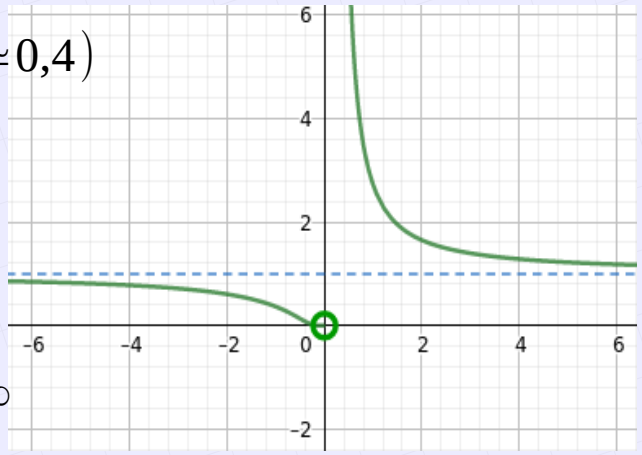
$\lim_{x\to 0} f(x)=e^{(\pm\infty)}$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=e^{(-\infty)}=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=e^{(+\infty)}=+\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=e^{(-\infty)}=0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=e^{(+\infty)}=+\infty$



$f(x)=e^{x^2}$

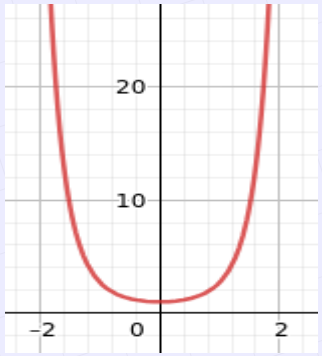
$\lim_{x\to 1} f(x)=e^{1}=e(\simeq 2{,}7)$

$\lim_{x\to -1} f(x)=e^{1}(\simeq 2{,}7)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=e^{0}=1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=e^{(+\infty)}=+\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=e^{(+\infty)}=+\infty$



$f(x)=\ln(1-x^2)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\ln 0=1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\ln(-\infty)=\nexists$

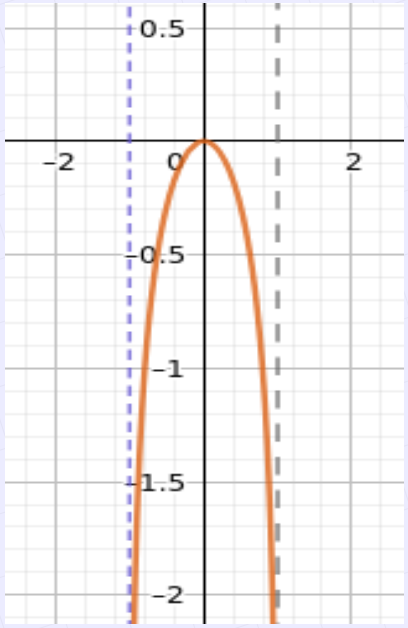
$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\ln(-\infty)=\nexists$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\ln(+0)=-\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\ln(-0)=\nexists$

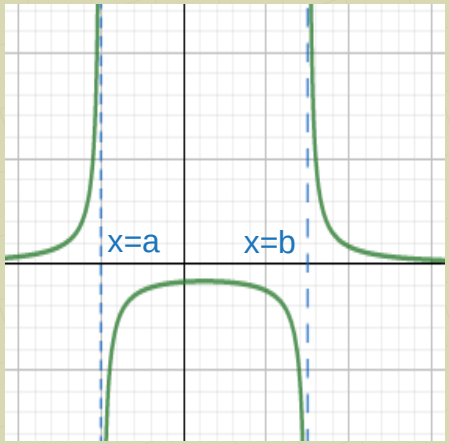
$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\ln(-0)=\nexists$

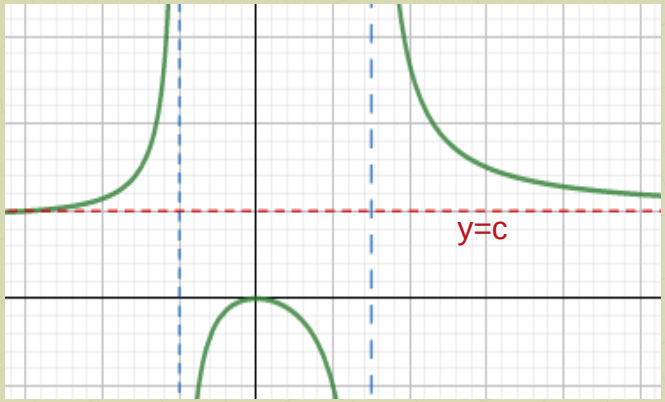
$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\ln(+0)=-\infty$

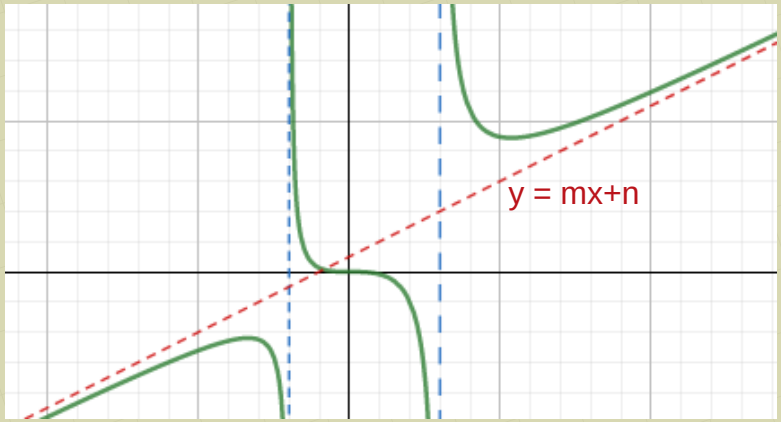


2. Asíntotas

Las asíntotas son rectas a las que una curva se acerca tanto como se quiera.
Pueden ser verticales, horizontales u oblícuas:







2.1. Asíntotas verticales: hay que buscarlas estudiando el dominio.
Si es una función a trozos también hay que tener en cuenta los puntos de ruptura

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

2.2. Asíntotas horizontales: hay que buscarlas en $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c$$

2.3. Asíntotas oblicuas: hay que buscarlas en $x \to \infty$. Se obtiene la ecuación de una recta.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$$

Donde hay asíntota horizontal, no puede haber oblícua

Ejemplos: Buscar las asíntotas de las siguientes funciones.

$f(x)=-x^4+4x^2$ Es polinómica. No tiene asíntotas

$f(x)=\dfrac{x}{-x^4+4x^2}$ Lo primero es estudiar el dominio

$-x^4+4x^2=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=2 \;,\; x=-2$ $\quad Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2\,,\,0\,,\,2\}$

1. Asíntotas verticales: las buscamos en 0, –2 y +2

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-x^3+4x}=\left(\frac{1}{0}\right)=\pm\infty \rightarrow \text{Asínt. vert. } x=0$$

hay que simplificar

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\left(\frac{-2}{-16+16}\right)=\left(\frac{-2}{0}\right)=\pm\infty \rightarrow \text{Asínt. vert. } x=-2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\left(\frac{2}{-16+16}\right)=\left(\frac{2}{0}\right)=\pm\infty \rightarrow \text{Asínt. vert. } x=2$$

2. Asíntotas horizontales: las buscamos en $x\to\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)=0 \rightarrow \text{Asínt. hor. } y=0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=0 \rightarrow \text{Asínt. hor. } y=0$$

3. Asíntotas oblicuas: si hay horizontales, no hay oblicuas

$$f(x)=\frac{x^3}{-x+4x^2}$$

Lo primero es estudiar el dominio

$$-x+4x^2=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=\frac{1}{4} \qquad Dom(f)=\mathbb{R}-\{0,\frac{1}{4}\}$$

1. Asíntotas verticales: las buscamos en 0 y ¼

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-1+4x}=\frac{0}{-1}=0 \rightarrow$$

Punto abierto en *x = 0* . No hay asíntota

hay que simplificar

$$\lim_{x\to \frac{1}{4}} f(x)=\left(\frac{1/64}{0}\right)=\pm\infty \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

Asínt. vert. x = *¼*

2. Asíntotas horizontales: las buscamos en *x* → ∞

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=+\infty \rightarrow$$

No hay asínt. hor.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=-\infty \rightarrow$$

No hay asínt. hor.

3. Asíntotas oblicuas: como no hay horizontales, puede haber oblicuas. Hay que usar las fórmulas para ello ficha 14

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{x^3}{-x+4x^2}}{x}=\frac{x^3}{-x^2+4x^3} \rightarrow m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{-x^2+4x^3}=\frac{1}{4}$$

$$f(x)-mx=\frac{x^3}{-x+4x^2}-\frac{x}{4}=\frac{4x^3+x^2-4x^3}{-4x^2+16x^3}=\frac{x^2}{-4x^2+16x^3} \rightarrow n=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{-4x^2+16x^3}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=0$$

Asínt. oblicua y = *¼x + 0*

Para –∞ sería igual.