Tema 5: Funciones. Inicio

1. Tablas de valores
2. Dominio
3. Funciones elementales
   - Polinómicas grado 1: lineales
   - Polinómicas grado 2: parábolas
   - Racionales “grado 1”: hipérbolas
   - Radicales
   - Exponenciales
   - Logarítmicas
   - Trigonométricas

1. Tablas de valores.

Las funciones están formadas por puntos con coordenadas *(x , y)* . Se suelen representar en tablas.

Si sabemos *x* , para obtener *y* se sustituye en la función.

Si sabemos *y* , para obtener *x* se resuelve la ecuación.

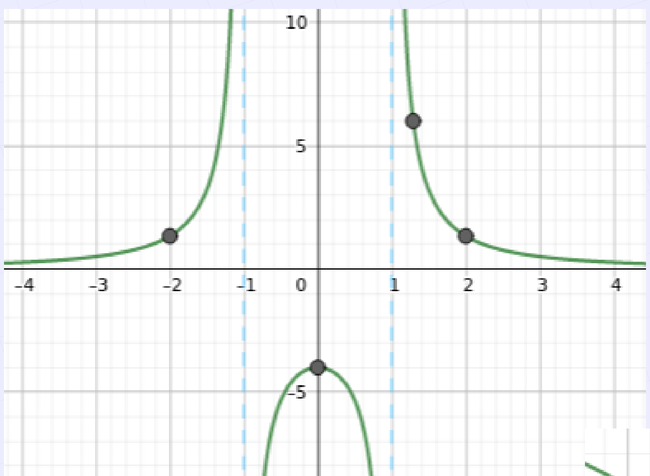
<u>Puntos de corte con los ejes:</u>

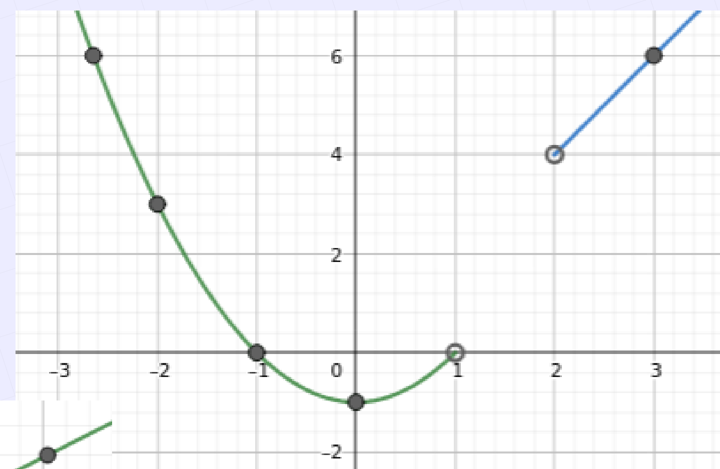
- Eje Y (ordenadas) : $x = 0 \rightarrow y = ?$
- Eje X (abcisas) : $y = 0 \rightarrow x = ?$

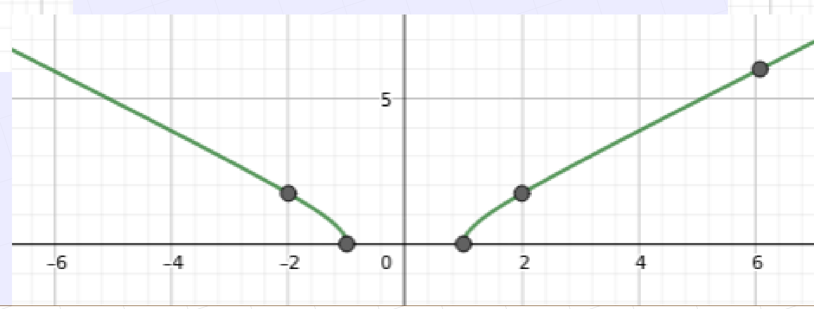
Ejercicio: Rellenar esta tabla para las funciones

$$f(x)=\frac{4}{x^2-1} \qquad g(x)=\sqrt{x^2-1} \qquad h(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \ si\ x<1 \\ 2x & , \ si\ x>2 \end{cases}$$

x	–2	– 1	0	1	2		
y						0	6







2. Dominio de una función

Es el conjunto de valores x que podemos dar a la función. Su estudio depende del tipo de función:

- Polinómicas: No son problemáticas, su dominio es ℝ
- Racionales: El denominador no puede ser 0
- Radicales de índice par: El radicando no puede ser negativo
- Exponenciales: No son problemáticas, su dominio es ℝ
- Logarítmicas: El argumento tiene que ser positivo
- Trigonométricas:
  - Seno y coseno: No son problemáticas, su dominio es ℝ
  - Tangente: el ángulo no puede ser 90° ni 270°

Ejercicio. Calcular el dominio de las funciones:

$$f_1(x)=x^2-1 \qquad f_2(x)=\frac{4}{x^2-1} \qquad f_3(x)=\sqrt{x^2-1} \qquad f_4(x)=2^{x^2-1} \qquad f_3(x)=\log_2(x^2-1)$$

$$f_5(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad si\, x<1 \\ 2x & , \quad si\, x>2 \end{cases}$$

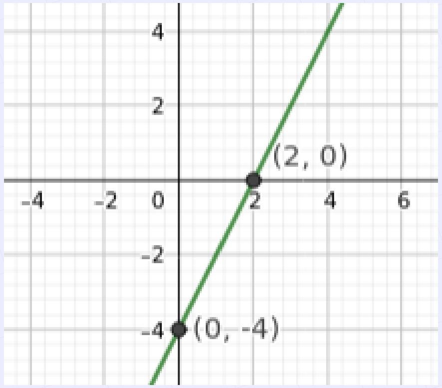
3. Funciones elementales. Características

3.1. Polinómicas grado 1: lineales $f(x)=mx+n$

$f(x)=2x-4$

- $Dom(f)=\mathbb{R}$
- Como la pendiente es positiva, será una recta creciente.
- Cortes con los ejes:
  - $x=0 \rightarrow y=-4$
  - $y=0 \rightarrow x=2$

Con esto ya podemos hacer la gráfica: *geogebra*

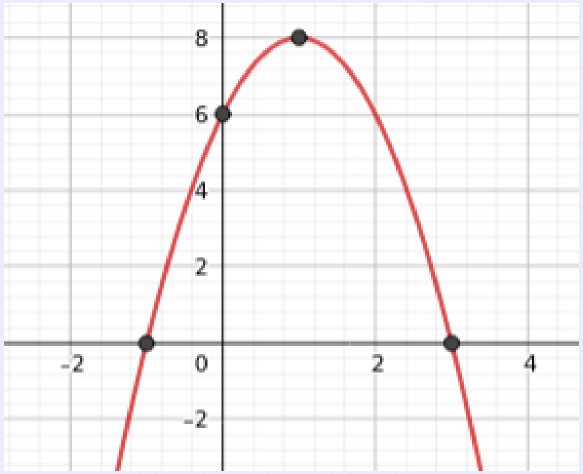


- $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$

3.2. Polinómicas grado 2: parábolas $f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x)=-2x^2+4x+6$

- $Dom(f)=\mathbb{R}$
- ***a < 0***: parábola cónvava (ramas hacia abajo).
- Cortes con los ejes:
  - $x=0 \rightarrow y=6$
  - $y=0 \rightarrow x=-1 \quad , \quad x=3$
- Vértice: $\boldsymbol{x=\frac{-b}{2a}} \rightarrow x=1 \quad , \quad y=8$



Con esto ya podemos hacer la gráfica: *geogebra*

- $\mathrm{Im}(f)=[8,-\infty)$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

3.3. Racionales “grado 1”: hipérbolas $\boldsymbol{f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}}$

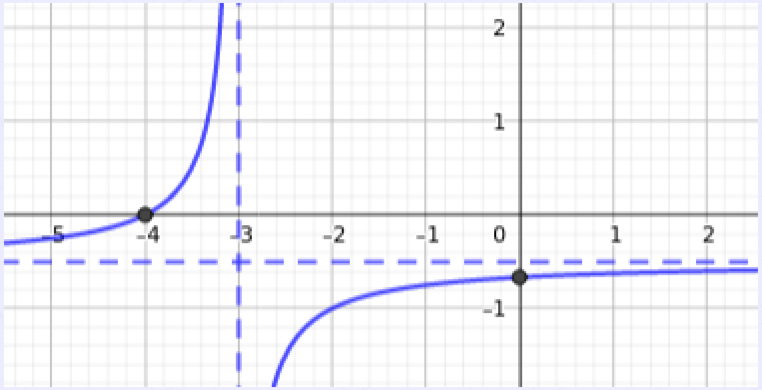
La principal característica es que tienen una asíntota horizontal y otra vertical

$$f(x)=\frac{-x-4}{2x+6}$$

- Dominio: $2x+6=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$
- Cortes con los ejes

  $x=0 \rightarrow y=\frac{-2}{3}$

  $y=0 \rightarrow x=-4$
- Asíntotas
  - Vertical: $x=-3$
  - Horizontal: $\boldsymbol{y=\frac{a}{c}} \rightarrow y=\frac{-1}{2}$



Con esto ya podemos hacer la gráfica: *geogebra*

$$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to-3} f(x)=\pm\infty \quad ; \quad \begin{cases} \lim_{x\to-3^-} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to-3^+} f(x)=-\infty \end{cases}$$

Ejercicios: Estudia las características principales y representa las funciones:

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-x \qquad g(x)=\frac{2x-1}{2x-2} \qquad h(x)=\begin{cases} 3-x & , \ x\leq 3 \\ \dfrac{3}{x-3} & , \ x>3 \end{cases} \qquad i(x)=|x^2-9|$$

3.4. Radicales "grado 1": semiparábolas $f(x)=\sqrt{ax+b}$

Para el dominio se debe tener en cuenta: ***ax + b ≥ 0***
Su gráfica es media parábola en horizontal. No tienen asíntotas

$f(x)=\sqrt{2x+6}$

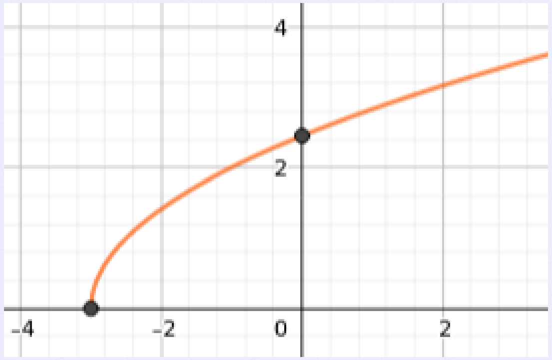
- Dominio: $2x+6=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow$ $\overbrace{\quad - \quad}^{} \ -3 \ \overbrace{\quad + \quad}^{}$ $\rightarrow \ Dom(f)=[-3,+\infty)$
- Cortes con los ejes

  $x=0 \rightarrow y=\sqrt{6}$

  $y=0 \rightarrow x=-3$

- Asíntotas: No tiene

Con esto ya podemos hacer la gráfica: *geogebra*



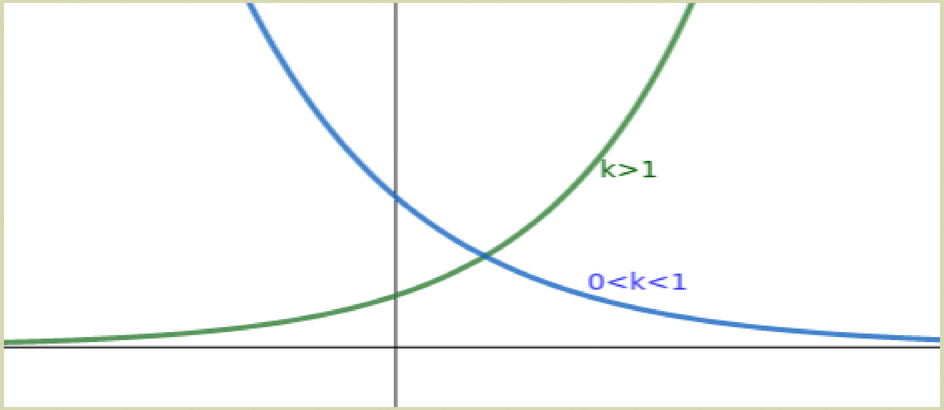
$\mathrm{Im}(f)=[0,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\nexists \ ; \quad \lim_{x\to-3} f(x)=? \ ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\nexists \\ \lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=0 \end{cases}$$

3.5. Exponenciales: $f(x)=k^{ax+b}$

Tienen una asíntota horizontal en *y = 0* por +∞ o por −∞.

Su dominio siempre es ℝ



$f(x)=2^{x-3}$

- Dominio: $Dom(f)=\mathbb{R}$
- Cortes con los ejes

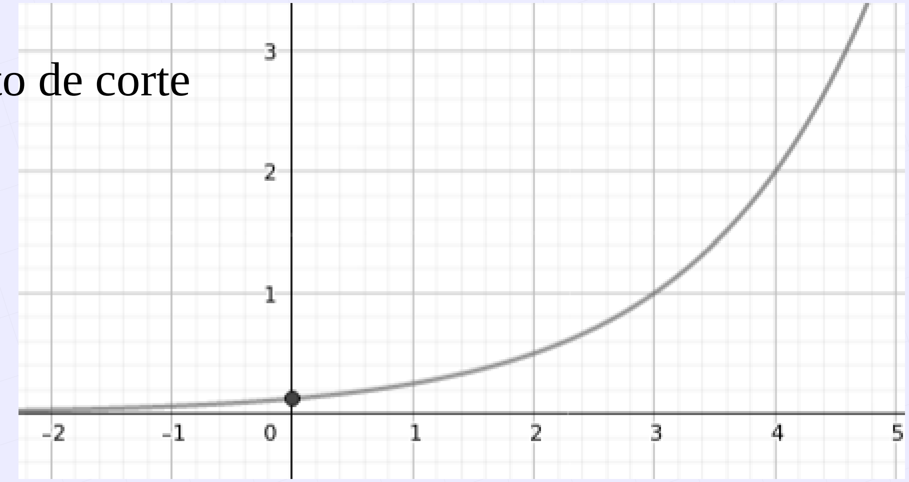
$$x=0 \rightarrow y=\frac{1}{8}$$

$$y=0 \rightarrow 2^{x-3}=0 \rightarrow x-3=\log_2 0=\nexists \rightarrow \text{No hay punto de corte}$$

- Asíntotas: Hay que hacer límites:

$$\lim_{x\rightarrow+\infty} f(x)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=0$$

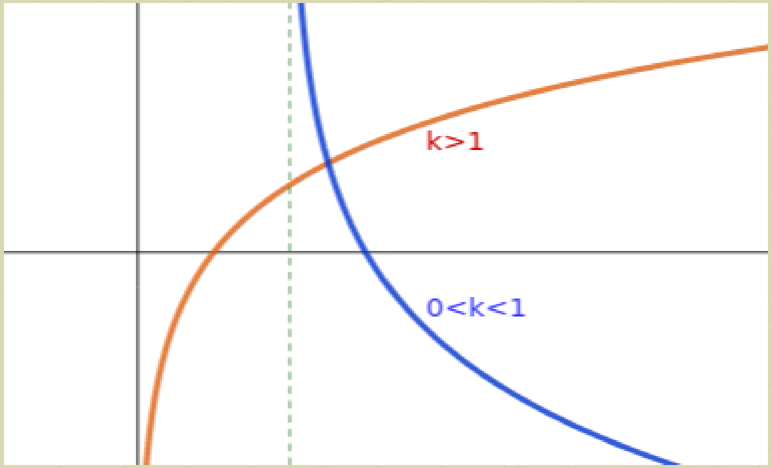
Con esto ya podemos hacer la gráfica: *geogebra*



$$\text{Im}(f)=(0,+\infty)$$

3.6. Logarítmicas: $\boldsymbol{f(x)=\log_k(ax+b)}$ $f(x)=\ln(ax+b)$

Tienen una asíntota vertical.
Para el dominio se debe tener en cuenta: ***ax + b > 0***



$f(x)=\log_2(x-3)$

- Dominio: $x-3=0 \rightarrow x=3 \rightarrow$ $\overset{-}{\longleftarrow}\ 3\ \overset{+}{\longrightarrow}$ $\rightarrow Dom(f)=(3,+\infty)$
- Cortes con los ejes

  $x=0 \rightarrow y=\nexists$

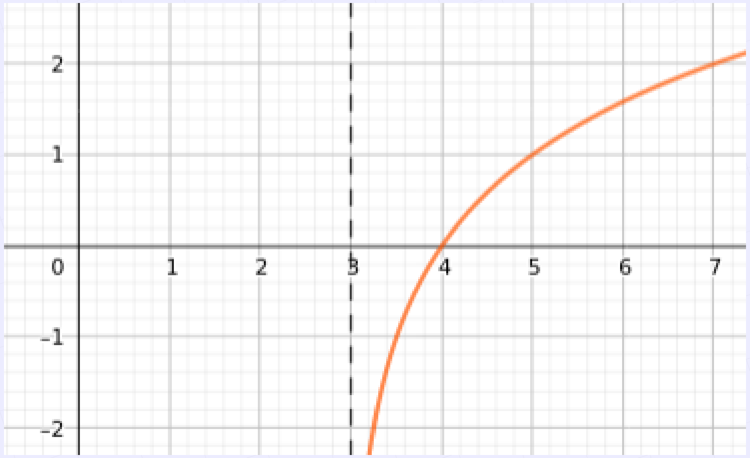
  $y=0 \rightarrow \log_2(x-3)=0 \rightarrow x-3=2^0=1 \rightarrow x=4$

- Asíntotas: Hay que hacer límites:

  $\lim_{x\rightarrow+\infty} f(x)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\rightarrow 3^+} f(x)=-\infty$

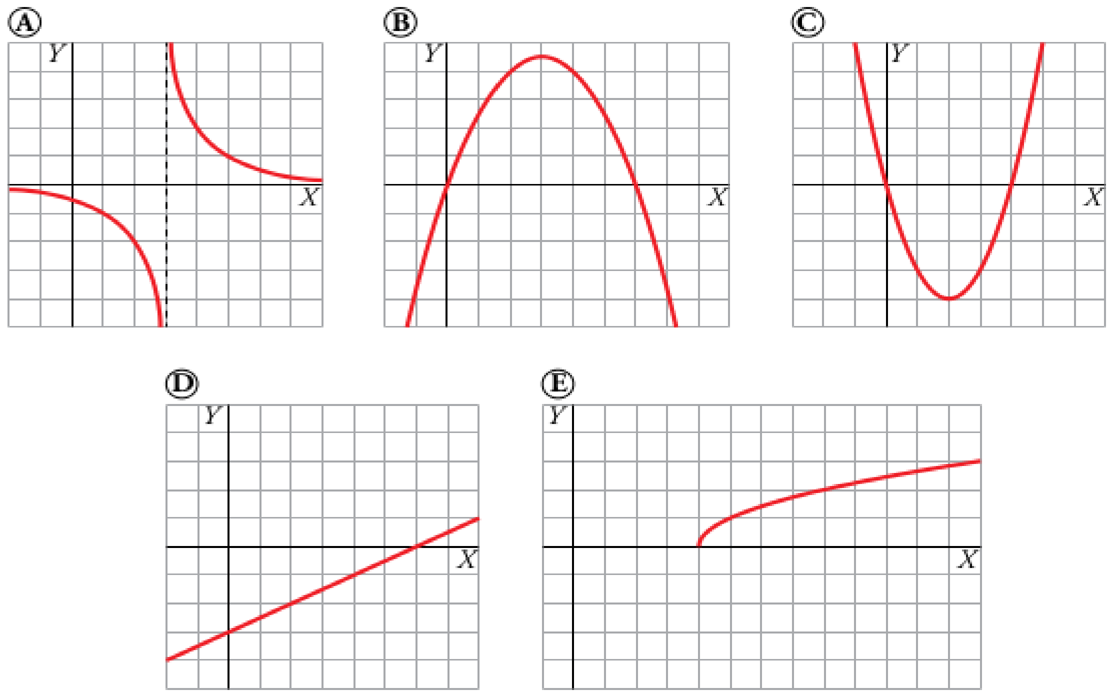
Con esto ya podemos hacer la gráfica: *geogebra*

$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$



Ejercicios:

1. - Asocia a cada una de las siguientes gráficas



una de estas expresiones analíticas:

I. $y = \dfrac{x-6}{2}$ II. $y = \sqrt{x-4}$ III. $y = x^2 - 4x$ IV. $y = \dfrac{2}{x-3}$ V. $y = 3x - \dfrac{x^2}{2}$

2. - Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \dfrac{2}{(x+5)^2}$ b) $y = \dfrac{3x+2}{x^3+x}$ c) $y = \dfrac{x}{x^2-x+2}$ d) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

3. - Estudia el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{2x+5}$ b) $y = \sqrt{7-x}$ c) $y = \sqrt{x^2+3x+4}$ d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

4. - Di cuál es el dominio de definición de:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Ejercicios:

5. - **En las siguientes funciones estudia las características principales y haz la gráfica.**

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-x & , \; si\, x<2 \\ 2x-6 & , \; si\, x>2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} -x^2-1 & , \; si\, x<2 \\ x^2-4 & , \; si\, x>2 \end{cases}$

6. - **En las siguientes funciones estudia las características principales y haz la gráfica.**

a) $f(x)=\dfrac{3-4x}{2x}$ b) $f(x)=\begin{cases} 1-x & , \; si\, x\leq 2 \\ \dfrac{2}{x-2} & , \; si\, x>2 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \; si\, x\leq 2 \\ \dfrac{2}{x-2} & , \; si\, x>2 \end{cases}$

7. - **En las siguientes funciones estudia las características principales y haz la gráfica.**

a) $f(x)=\sqrt{3-4x}$ b) $f(x)=3-\sqrt{3-x}$ c) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{6-x} & , \; si\, x\leq 2 \\ \sqrt{2x} & , \; si\, x>2 \end{cases}$

8. - **En las siguientes funciones estudia las características principales y haz la gráfica.**

a) $f(x)=0{,}1^{2x}$ b) $f(x)=e^x$ c) $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & , \; si\, x\leq 2 \\ e^{x-4} & , \; si\, x>2 \end{cases}$

9. - **En las siguientes funciones estudia las características principales y haz la gráfica.**

a) $f(x)=\log(5-x)$ b) $f(x)=\ln x$ c) $f(x)=\begin{cases} \ln(-x+3) & , \; si\, x\leq 2 \\ (x-2)^2 & , \; si\, x>2 \end{cases}$

10. - **En las siguientes funciones estudia las características principales y haz la gráfica.**

a) $f(x)=4+|x^2-4|$ b) $f(x)=e^{|x|}$ c) $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-6}$