

Tema 4: Plano afín. Puntos y rectas

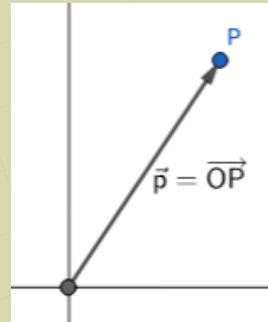
1. Puntos y vectores
2. Rectas. Ecuaciones de la recta
3. Paralelismo y perpendicularidad
4. Posiciones relativas entre dos rectas
5. Ángulo entre dos rectas
6. Distancia de un punto a una recta

1. Puntos y vectores

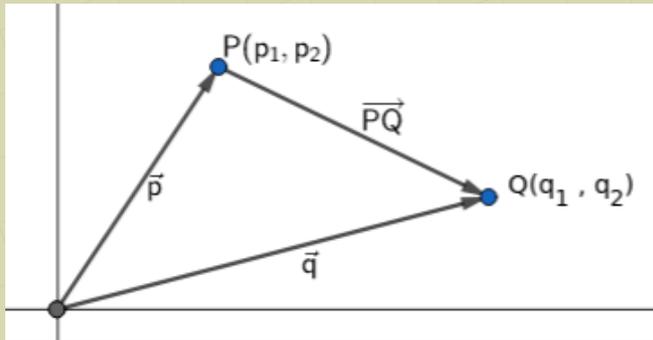
Vector de posición:

Cada punto tiene asociado un vector con sus mismas coordenadas.

$$P(p_1, p_2) \rightarrow \vec{p} \equiv \vec{OP} = (p_1, p_2)$$



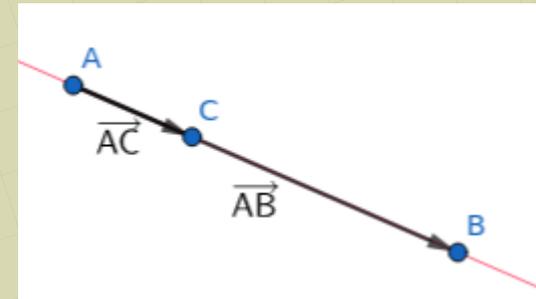
Vector de un punto a otro:



$$\vec{p} + \vec{PQ} = \vec{q} \rightarrow \vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$$
$$\vec{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$$

Puntos alineados:

Varios puntos están en línea recta si los vectores que los unen tienen la misma dirección: sus coordenadas son proporcionales

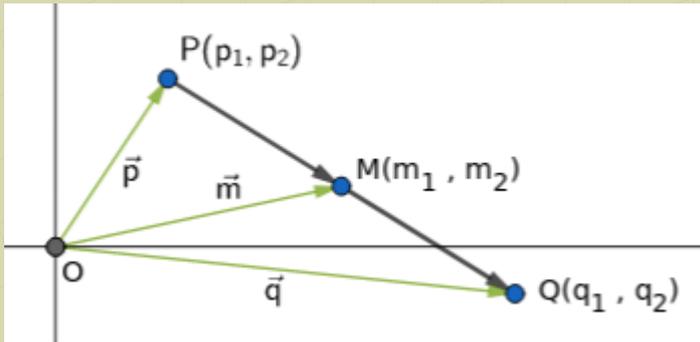


$$\vec{AB} \parallel \vec{AC}$$

$$\vec{AB} = (v_1, v_2) \quad , \quad \vec{AC} = (u_1, u_2)$$

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

Punto medio de un segmento:



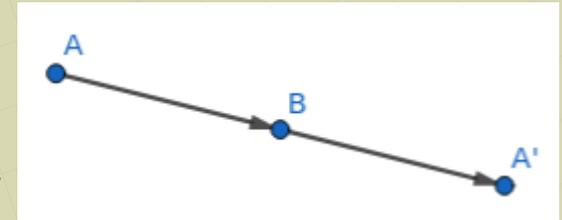
$$\vec{p} + 2\vec{PM} = \vec{q} \rightarrow \vec{PM} = \frac{\vec{q} - \vec{p}}{2}$$
$$\vec{m} - \vec{p} = \frac{\vec{q} - \vec{p}}{2} \rightarrow \vec{m} = \vec{p} + \frac{\vec{q} - \vec{p}}{2} = \frac{2\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}}{2}$$

$$\vec{m} = \frac{\vec{p} + \vec{q}}{2} \rightarrow M\left(\frac{p_1 + q_1}{2}, \frac{p_2 + q_2}{2}\right)$$

Simétrico de un punto respecto a otro:

Simétrico de A respecto de B : A'. B sería el punto medio del segmento $\overline{AA'}$

$$\vec{AB} = \vec{BA'}$$



Ejercicios:

Se tienen los siguientes puntos: $A(2, 1)$, $B(3, -2)$, $C(0, 4)$.

- Calcula las coordenadas del vector \vec{AC}
- Calcula el punto medio del segmento \overline{AB}
- Calcula dos puntos, D_1 y D_2 , que parten al segmento anterior en tres partes iguales
- Calcula un punto $E(x, 3)$ que esté alineado con B y C
- Calcula el simétrico de A respecto de B
- El simétrico de B respecto de un punto P es $B'(5, 0)$. Calcula P

2. Rectas: ecuaciones

Para obtener la ecuación de una recta necesitamos un punto por el que pase y un vector que nos dé la dirección:

$$r: \begin{cases} P(p_1, p_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{cases}$$

Con esto ya podemos sacar puntos de la recta:

Ejemplo:

- Obtener cuatro puntos de la recta que pasa por el punto $P(1, 1)$ y lleva la dirección del vector $\vec{v} = (2, 1)$
- Obtener un punto de la recta anterior cuya segunda coordenada sea 25.

La ecuación de una recta es una fórmula que deben cumplir los infinitos puntos de la recta.

En el ejemplo anterior sería: $r: (x, y) = (1, 1) + t \cdot (2, 1)$

En general, la ecuación de una recta será: $r: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$

Ecuación vectorial:

Esta ecuación se llama **ecuación vectorial**. Si la desarrollamos se obtienen otras ecuaciones que se usan según convenga.

Ecuaciones paramétricas: se separan las coordenadas en la vectorial y se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 1t \end{cases}$$

Ecuación continua: se despeja t en las paramétricas y se igualan los resultados:

$$r: \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

$$r: \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{1}$$

Ecuación general o implícita: se multiplica en cruz en la continua y se iguala a 0:

$$r: v_2 \cdot x - v_1 \cdot y + C = 0$$

$$r: Ax + By + C = 0 \quad ; \quad A = v_2 \quad , \quad B = -v_1$$

$$r: 1x - 2y + 1 = 0$$

Ecuación explícita: se despeja y en cualquiera de las anteriores:

$$r: y = \frac{v_2}{v_1} \cdot x + \frac{C}{v_1}$$

$$r: y = m \cdot x + n \quad ; \quad \begin{cases} m = \frac{v_2}{v_1} : \text{pendiente} \\ n : \text{ordenada en el origen,} \\ \text{corte de la recta con el eje Y} \end{cases}$$

$$r: y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \quad ; \quad \begin{cases} m = \frac{1}{2} : \text{pendiente} \\ n = \frac{1}{2} : \text{ordenada en el origen,} \\ \text{corte de la recta con el eje Y} \end{cases}$$

Ecuación punto-pendiente: de la ecuación continua:

$$r: y - p_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot (x - p_1)$$

$$r: y - p_2 = m \cdot (x - p_1)$$

$$r: y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)$$

Paso de la ecuación general o de la explícita a las otras: Se dan valores para obtener dos puntos.

Ejemplo: Obtener todas las ecuaciones de la recta $y = -3x + 4$

$$x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow A(0, 4)$$

$$x = 2 \rightarrow y = -2 \rightarrow B(2, -2)$$

$$\vec{AB} = (2, -6)$$

Ejercicios

1. Obtener todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 0)$ y $B(2, -2)$
2. Obtener todas las ecuaciones de la recta $3x - 2y + 1 = 0$
3. Obtener todas las ecuaciones del eje OX
4. Obtener 4 puntos de las rectas:
 - a) $(x, y) = (2, 3) + t \cdot (5, -4)$
 - b) $3x - 2y + 1 = 0$
 - c) $y = 2$
 - d) $x = -3$
5. Obtener los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las rectas del ejercicio 3
6. Obtener las ecuaciones paramétricas y continua de la recta que corta a los ejes en $x = 3$ y en $y = -1$

3. Paralelismo y perpendicularidad

Rectas paralelas:

- Sus vectores de dirección son paralelos; sus coordenadas son proporcionales
- Sus pendientes son iguales

$$r \parallel s \rightarrow \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} \rightarrow m_1 = m_2$$

Rectas perpendiculares:

- Sus vectores de dirección son perpendiculares; al multiplicarlos da 0; sus coordenadas son proporcionales, pero cambiadas de orden y una de ellas de signo
- Sus pendientes son opuestas e inversas

$$r \perp s \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 = 0 \rightarrow m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

Ejercicios:

1a. Da una ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{4}$$

1b. Da una ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a

2a. Da una ecuación de la recta que pasa por $P(1, 1)$ y es paralela a $s: 2x - 3y + 5 = 0$

2b. Da una ecuación de la recta que pasa por $P(1, 1)$ y es perpendicular a $s: 2x - 3y + 5 = 0$

3a. Da una ecuación de la recta que pasa por $A(0, 1)$ y es paralela a $t: y = 2x + 5$

2b. Da una ecuación de la recta que pasa por $A(0, 1)$ y es perpendicular a $t: y = 2x + 5$

4. Posiciones relativas entre dos rectas

Las posibles posiciones son:

- No paralelas, secantes: se cortan en un punto
- Paralelas:
 - Paralelas disjuntas: no tienen ningún punto en común
 - Paralelas coincidentes: coinciden en todos los puntos

Para estudiar esto a partir de sus ecuaciones:

1. Ecuación vectorial, paramétrica o continua:

$$r: \begin{cases} P(p_1, p_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q(q_1, q_2) \\ \vec{u} = (u_1, u_2) \end{cases}$$

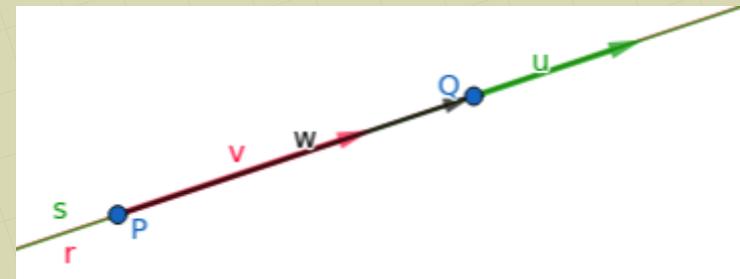
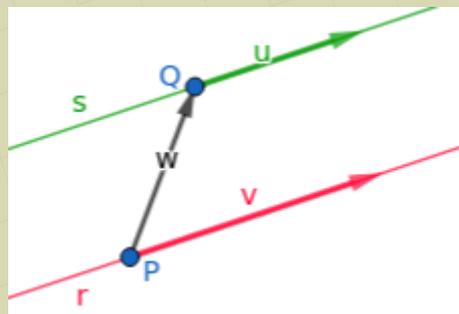
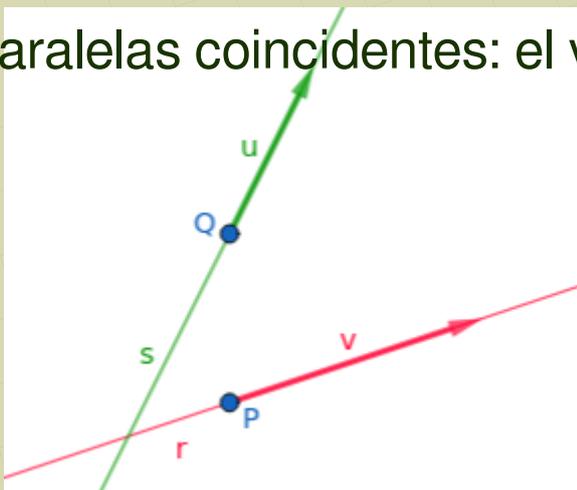
- No paralelas: los vectores no son proporcionales: $\frac{v_1}{v_2} \neq \frac{u_1}{u_2}$
- Paralelas: los vectores son proporcionales: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{u_1}{u_2}$

• Paralelas disjuntas: el vector \vec{PQ} no es proporcional:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{u_1}{u_2} \neq \frac{q_1 - p_1}{q_2 - p_2}$$

• Paralelas coincidentes: el vector \vec{PQ} también es proporcional:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{q_1 - p_1}{q_2 - p_2}$$



2. Ecuación general:
$$\begin{cases} r: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ s: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

- No paralelas: el sistema tiene una solución
- Paralelas:
 - Paralelas disjuntas: el sistema no tiene solución $0x + 0y = k$
 - Paralelas coincidentes: el sistema tiene infinitas soluciones $0x + 0y = 0$

3. Ecuación explícita:
$$\begin{cases} r: y = m_1 x + n_1 \\ s: y = m_2 x + n_2 \end{cases}$$

- No paralelas: las pendientes no son iguales $m_1 \neq m_2$
- Paralelas: las pendientes son iguales $m_1 = m_2$
 - Paralelas disjuntas: las ecuaciones no son iguales $m_1 = m_2, n_1 \neq n_2$
 - Paralelas coincidentes: las ecuaciones son iguales $m_1 = m_2, n_1 = n_2$

Ejercicios:

Averigua la posición relativa de estos pares de rectas:

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0$
 $s: 6x + 10y + 4 = 0$

b) $r: 2x + y - 6 = 0$
 $s: x - y = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}, s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

d) $r: 3x - 5y = 0, s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

5. Ángulo entre dos rectas

Se trata de calcular el ángulo que forman dos vectores, usando el producto escalar. Puede hacerse con los vectores directores o con los vectores normales a las rectas. Siempre hay que dar el resultado con un ángulo del primer cuadrante

$$r: \begin{cases} P(p_1, p_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q(q_1, q_2) \\ \vec{u} = (u_1, u_2) \end{cases} \quad \cos \alpha = \widehat{(r, s)} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|}$$

$$\begin{cases} r: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ s: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = (A_1, B_1) \\ \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \end{cases} \quad \cos \alpha = \widehat{(r, s)} = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Ejercicios:

Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

$$\text{a) } r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}, r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases} \quad \text{b) } r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}, r_2: 3x - 5y + 4 = 0 \quad \text{c) } r_1: y = 5x - 1 \\ r_2: y = 4x + 3$$

6. Distancia de un punto a una recta

Se necesita la ecuación general de la recta: $P(p_1, p_2)$, $r: Ax + By + C = 0$

$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejercicios:

1. Calcula la distancia del punto $A(2, -2)$ a la recta $r: y = -3x + 5$
2. Calcula la distancia entre las rectas: $r: y = -3x + 5$ y $s: (x, y) = (1, 0) + t(-1, 3)$

Ejercicios:

1. - Determina k para que los puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(6, k)$ estén alineados.

$$k = \frac{-11}{5}$$

2. - Sean $A(8, -2)$ y $B(-4, 2)$ dos puntos. Calcula:

a) M , punto medio de A y B .

$$(2, 0) \quad S = (-16, 6) \quad P = (20, -6)$$

b) S , simétrico de A respecto a B .

c) P , tal que A sea el punto medio del segmento BP .

3. - Da las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos $A(3, 4)$ y $B(0, -2)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.

$$P(2, 2)$$

4. - Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(6, 3)$.

$$D(2, 6)$$

5. - Escribe la ecuación de la recta que pasa por P y Q de todas las formas posibles.

a) $P(6, -2)$ y $Q(0, 5)$ b) $P(3, 2)$ y $Q(3, 6)$

Obtén 2 puntos más para cada recta.

6. - Determina un vector normal y la ecuación implícita de cada una de las siguientes rectas:

a) $r: \frac{x+1}{-2} = y-1$ b) $s: \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t - 2 \end{cases}$

7. - Obtén, para cada una de las siguientes rectas, un vector dirección, un vector normal y su pendiente:

a) $r_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t \end{cases}$ b) $r_2: \frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{4}$ c) $r_3: x + 3 = 0$ d) $r_4: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

8. - Determina un punto y un vector dirección de cada recta. Utilízalos para dar sus ecuaciones continuas y paramétricas.

a) $3x - 2y + 1 = 0$ b) $y = 2(x - 1) + 7$ c) $x - 3 = 0$ d) $y = \frac{2}{3}x + 1$

9. - Comprueba si el punto $P(5, -7)$ pertenece a alguna de las siguientes rectas:

a) $r: \begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2t \end{cases}$ b) $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5}$

Ejercicios:

10. - Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$, obtén en forma explícita las siguientes rectas:

a) Paralela a r que pasa por $A(-1, -3)$.

b) Perpendicular a r que pasa por $B(-2, 5)$.

11. - De una cierta recta r conocemos su pendiente $m = \frac{2}{3}$. Halla la recta s en cada caso:

a) s es paralela a r y pasa por $(0, 0)$.

b) s es perpendicular a r y pasa por $(1, 2)$.

12. - El vector normal de la recta r es $\vec{n}(2, -3)$. Obtén, en cada caso, la ecuación de la recta s .

a) s es paralela a r y contiene al punto $P(2, -3)$.

b) s es perpendicular a r y pasa por $Q(0, 1)$.

Halla la ecuación de la paralela a $2x - 3y = 0$ cuya ordenada en el origen es -2 .

13. - Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.

14. - Halla, en cada caso, el valor de k para que la recta $r: y = kx + 1$ sea:

a) Paralela al eje OX .

b) Perpendicular a la recta $2x + 3y + 7 = 0$.

15. - Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto a la recta $x - 2y - 4 = 0$.

16. - Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Calcula el punto de corte cuando sean secantes.

a) $r: 5x + y + 7 = 0$; $s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$

b) $r: 3x + 5y + 10 = 0$; $s: -3x + 5y + 10 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

d) $r: y = 2x + 1$; $s: y = \frac{-1}{2}x + 1$

Ejercicios:

17. - Calcula el valor de los parámetros k y t para que las siguientes rectas se corten en el punto $A(1, 2)$:

$$k = 2, t = -1$$

$$r: kx - ty - 4 = 0 \quad s: 2tx + ky - 2 = 0$$

18. - Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r: y = 2x + 5$; $s: y = -3x + 1$

b) $r: 3x - 5y + 7 = 0$; $s: 10x + 6y - 3 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$

19. - ¿Qué ángulo forma $3x - 2y + 6 = 0$ con el eje de abscisas?

20. - Las rectas $r: 3x - 2y + 6 = 0$, $s: 2x + y - 6 = 0$ y $t: 2x - 5y - 4 = 0$ son los lados de un triángulo. Representalo y halla sus ángulos.

21. - Calcula k de modo que la distancia entre los puntos $A(5, k)$ y $B(3, -2)$ sea igual a 2.

22. - Determina, en cada caso, si el triángulo ABC es equilátero, isósceles o escaleno.

a) $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$ b) $A(1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 7)$ c) $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -3)$

23. - Halla las distancias de $O(0, 0)$ y $P(-1, 2)$ a estas rectas:

a) $3x - 4y + 5 = 0$ b) $2x + 5 = 0$ c) $\begin{cases} x = 6t \\ y = 8t \end{cases}$

24. - Determina c para que la distancia de $r: x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades (hay dos soluciones).

25. - Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:

a) $r: 3x + 5 = 0$; $r': \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 4k \end{cases}$

b) $r: y = \frac{-2}{3}x + 1$; $r': \frac{1-x}{3} = \frac{y+1}{2}$

26. - Comprueba que el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 2)$ es rectángulo y halla su área.

Ejercicios:

- 27.- Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 3)$ y $C(6, 8)$, calcula su área.
- 28.- Calcula c para que la distancia entre las rectas de ecuaciones $4x + 3y - 6 = 0$ y $4x + 3y + c = 0$ sea igual a 3.
- 29.- Encuentra un punto en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste de los ejes de coordenadas.
- 30.- Determina, en cada caso, un punto P de la recta $r: y = -x + 1$ tal que:
- La distancia de P a $s: 3x - 4y + 2 = 0$ sea 1.
 - P diste 3 unidades del eje OX .
- 31.- Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas $4x + 3y + 6 = 0$ y $3x + 4y - 9 = 0$.
- 32.- Dada la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la recta simétrica de r respecto al eje de abscisas.
- 33.- Halla la recta, t , simétrica a $r: -3x + 4y + 9 = 0$ respecto de la recta $s: 2x - y - 6 = 0$.