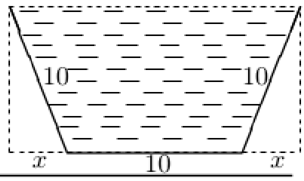
Ejercicio 1.- Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua, cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima. Se pide:

a) [0,25 puntos] Halla la altura de la canaleta en función de x (ver la figura).

b) [0,75 puntos] Halla el área de la sección de la canaleta en función de x.

c) [1,5 puntos] Encuentra el valor de x que hace máximo dicho área.



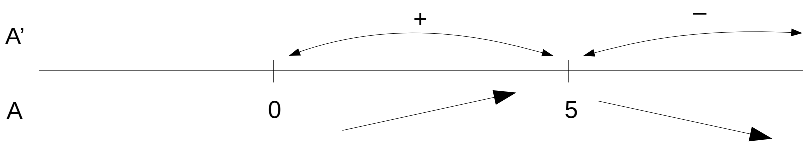
A.1.a) Teorema de Pitágoras: $y^2=100-x^2$, $y=\sqrt{100-x^2}$

A.1.b) Rectángulo de base *10* más dos triángulos invertidos de base *x* :

$$A=10\cdot y+2\frac{x\cdot y}{2}=10\sqrt{100-x^2}+x\sqrt{100-x^2}=(10+x)\sqrt{100-x^2}$$

A.1.c) $A'=\sqrt{100-x^2}+(10+x)\dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\dfrac{100-x^2-10x-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\dfrac{100-10x-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

$A'=0$; $x=-10$, $x=5$. Solo consideramos *x = 5*



En *x = 5* se consigue el máximo

Ejercicio 2.- **[2,5 puntos]** Determina la función $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ es $y=x+2$.

A.2) De la recta tangente obtenemos dos datos: $f(2)=4$, $f'(2)=1$

Hacemos la integral de f'' para obtener f' : $f'(x)=\int(x-1)^{-2}dx=\dfrac{(x-1)^{-1}}{-1}+K_1=\dfrac{-1}{x-1}+K_1$

Sustituimos: $f'(2)=-1+K_1=1 \rightarrow K_1=2 \rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x-1}+2$

Hacemos la integral de f' para obtener f : $f(x)=\int\left(\dfrac{-1}{x-1}+2\right)dx=-\ln(x-1)+2x+K_2$

Sustituimos: $f(2)=-\ln 1+4+K_2=4 \rightarrow K_2=0 \rightarrow f(x)=-\ln(x-1)+2x$

Ejercicio 3.- Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Calcula A^{2018}.

b) [1,5 puntos] Determina, si existe, la matriz X que verifica $A(X+2I) = BC$ donde I es la matriz identidad.

A.3.a) A^{2018}

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2018 & 2018 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.3.b) $X = (A^{-1}BC) - 2I$

Inversa(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa(A) · B · C

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

X := Inversa(A) · B · C − 2 · I

$$\rightarrow X := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x+y &= z+4 \\ x+2y &= 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-2 &= 0 \\ y+3 &= 0 \end{cases}$$

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de r y s.

b) [1,5 puntos] Determina la recta perpendicular común a r y a s.

A.4.a) Pasamos a ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases} \quad , \quad r:\begin{cases} A(1,3,0) \\ \vec{u}=(2,-1,1) \end{cases} \quad . \quad s:\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=s \end{cases} \quad , \quad s:\begin{cases} B(2,-3,0) \\ \vec{v}=(0,0,1) \end{cases} \quad . \quad \overrightarrow{AB}=(1,-6,0)$$

Estudiamos los rangos de los vectores:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rang(\vec{u},\vec{v})=2$$. Las rectas no son paralelas.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rang(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})=3$$. Las rectas se cruzan.

A.4.b) Tomamos un punto genérico de cada recta: $P(1+2t,3-t,t)$, $Q(2,-3,s)$

$$\overrightarrow{PQ}=(1-2t,-6+t,s-t)$$

Imponemos la perpendicularidad:

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} \vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} -6t+s+8=0 \\ -t+s=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} t=\dfrac{8}{5} \\ s=\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

La perpendicular común es $p:\begin{cases} Q(2,-3,\frac{8}{5}) \\ \overrightarrow{PQ}=(-11,22,0) \end{cases}$, $p:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=-3+2\lambda \\ z=\dfrac{8}{5} \end{cases}$

SOLUCIONES
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**
Examen Septiembre Suplente 2. Año 2018

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ para $x\neq 1$.

a) [0,75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de f indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

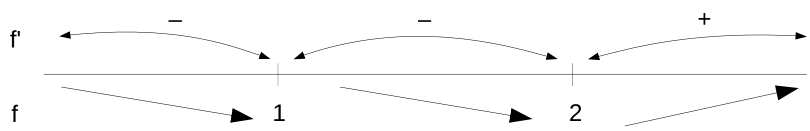
B.1.a) Verticales: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\end{cases}$. Asíntota vertical en *x = 1*

Horizontales: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\text{(L'Hopital)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\left(\dfrac{0}{-\infty}\right)=0\end{cases}$. Asíntota horizontal en y *= 0 (por –∞)*

Oblícuas: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2-x}=\text{(L'Hopital)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x-1}=\text{(L'Hopital)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$. No hay asíntota

B.1.b) $Dom(f)=\mathbb{R}-(1)$

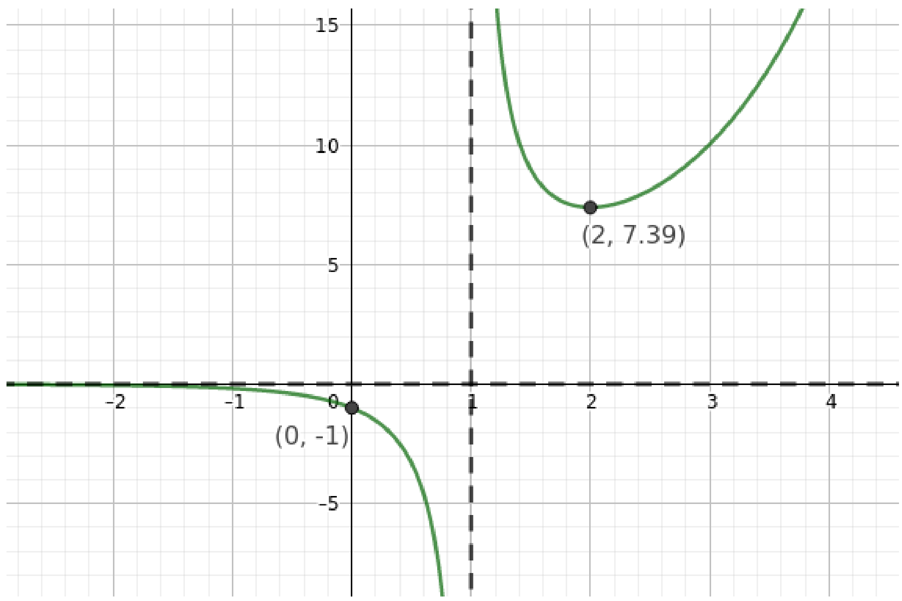
$f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$; $f'(x)=0$; $x=2$



Decreciente en (–∞ , 1) y en (1 , 2) . Creciente en (2 , +∞) . Tiene un mínimo relativo en $(2\ ,\ e^2)$

B.1.c) Corte en eje Y : (0 , –1)

Cortes en eje X: $y=0$; $e^x=0$; $x=\nexists$



Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

a) [1,75 puntos] Calcula $\int f(x)\,dx$

b) [0,75 puntos] Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.

B.2.a) $$\int f(x)dx = \left[\begin{matrix} u=x \;\; ; \;\; du=dx \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)dv=dx \;\; ; \;\; v=2\,sen\left(\frac{x}{2}\right)\end{matrix}\right] = x\cdot 2\,sen\left(\frac{x}{2}\right) - \int 2\,sen\left(\frac{x}{2}\right)dx = x\cdot 2\,sen\left(\frac{x}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) + K$$

B.2.b) $$F(x) = x\cdot 2\,sen\left(\frac{x}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) + K \;\; ; \;\; F(0) = 4 + K = 1 \;\; ; \;\; K = -3$$

$$F(x) = x\cdot 2\,sen\left(\frac{x}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 3$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} x + y + mz &= 1 \\ x + my + z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= m \end{aligned}\right.$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema en función del parámetro m.

b) [0,75 puntos] Si es posible, resuelve el sistema para $m = 1$.

B.3.a) Tomamos un menor de orden 2 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. r(A) ≥ 2

Ahora de orden 3 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -m^2 + 6m - 5 \;\; ; \;\; |A| = 0 \;\; , \;\; m = 1 \;,\; 5$

Y ahora la matriz ampliada: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 2m + 1 \;\; ; \;\; \begin{cases} Si\, m=1 \;\; , \;\; |\bar{A}| = 0 \\ Si\, m=5 \;\; , \;\; |\bar{A}| \neq 0 \end{cases}$

1. Si *m ≠ 1* y *m ≠ 5* : r(A) = 3 , r($\bar{A}$) = 3 , n = 3 : sistema compatible determinado

2.1. Si m = 1 : r(A) = 2 , r($\bar{A}$) = 2 , n = 3 : sistema compatible indeterminado

2.2. Si m = 5 : r(A) = 2 , r($\bar{A}$) = 3 , n = 3 : sistema incompatible

B.3.b) $z = t \;\; ; \;\; \left.\begin{matrix} x + y = 1 - t \\ x + 2y = 1 - 4t \end{matrix}\right\} \;\; ; \;\; \left.\begin{matrix} y = -3t \\ x = 1 + 2t \end{matrix}\right\}$. Soluciones (1+2t , –3t , t)

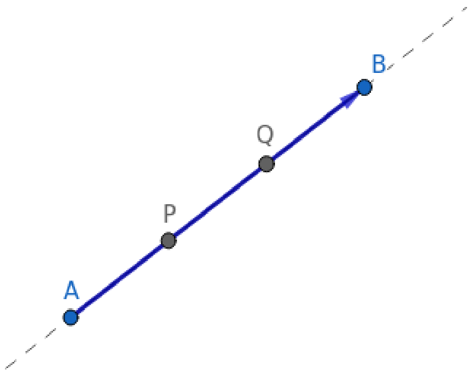
Ejercicio 4.- Considera los puntos $A(2,-1,-2)$ y $B(-1,-1,2)$, y la recta r dada por

$$x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

a) [1 punto] Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.

b) [1,5 puntos] Determina un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

B.4.a)



$$\vec{AP}=\frac{1}{3}\vec{AB} \quad , \quad (p_1-2,p_2+1,p_3+2)=(-1,0,\frac{4}{3})$$

$$P(1,-1,-\frac{2}{3})$$

$$\vec{AQ}=\frac{2}{3}\vec{AB} \quad , \quad (q_1-2,q_2+1,q_3+2)=(-2,0,\frac{8}{3})$$

$$Q(0,-1,\frac{2}{3})$$

B.4.b) Tomamos un punto genérico de la recta: $C(1+t,1-t,1+2t)$

Imponemos la perpendicularidad:

$$\vec{CA}\perp\vec{CB} \quad , \quad \vec{CA}\cdot\vec{CB}=0 \quad , \quad (1-t,-2+t,-3-2t)\cdot(-2-t,-2+t,1-2t)=0$$

$$6t^2+t-1=0 \quad ; \quad t=\frac{-1}{2} \quad , \quad t=\frac{1}{3}$$

Hay dos soluciones: $C_1(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$, $C_2(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3})$