SOLUCIONES

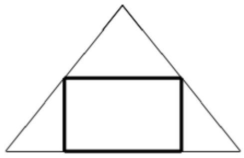
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**

Examen Septiembre Reserva 2. Año 2018

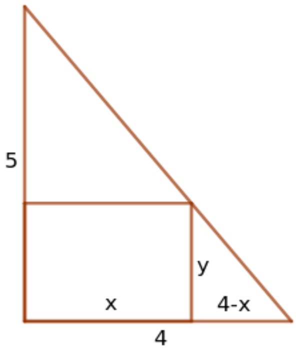
Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.-

[2,5 puntos] Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo (ver figura).



A.1)



Partimos la figura por la mitad y aplicamos proporcionalidad:

$$\frac{5}{4}=\frac{y}{4-x} \;;\; y=\frac{20-5x}{4}$$

Área del rectángulo: $f(x)=2x\cdot y=2x\cdot\frac{20-5x}{4}=\frac{40x-10x^2}{4}$

Buscamos el máximo:

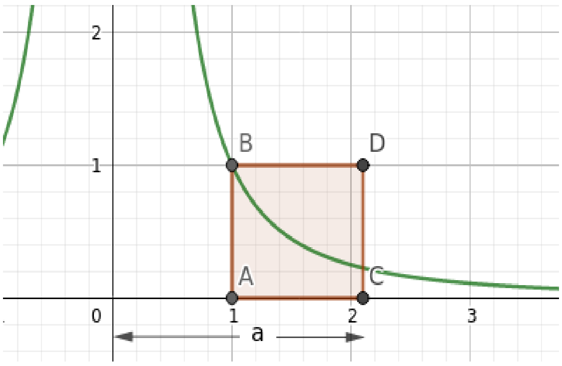
$$f'(x)=\frac{40-20x}{4} \;;\; f'=0 \;;\; x=2$$

$f''(x)=-5<0$. Es un máximo. Las dimensiones son base = 4 cm , altura = 2,5 cm

Ejercicio 2.- Siendo $a>1$, considera el rectángulo de vértices $A(1,0), B(1,1), C(a,1)$ y $D(a,0)$. La gráfica de la función f definida por $f(x)=\frac{1}{x^2}$ para $x\neq 0$ divide al rectángulo anterior en dos recintos.

a) [0,5 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f y del rectángulo descrito.

b) [2 puntos] Determina el valor de a para el que los dos recintos descritos tienen igual área.



A.2.a) La función tiene asíntotas horizontal *y = 0* y vertical *x = 0*

A.2.b) El área del rectángulo es $A=(a-1)\cdot 1=a-1$. Por tanto $\int_1^a \frac{1}{x^2}dx=\frac{a-1}{2}$

Calculamos la integral: $\int_1^a \frac{1}{x^2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^a=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^a=\frac{-1}{a}+1$. Igualamos y resolvemos:

$\frac{-1}{a}+1=\frac{a-1}{2} \;;\; -2+2a=a^2-a \;;\; a=1 \,,\, a=2$. La solución es a = 2

Ejercicio 3.- Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema dado por $AX = mX$ según los valores del parámetro m.

b) [0,5 puntos] Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.

c) [0,5 puntos] Para $m = 3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x + y + z = 3$.

A.3.a) El sistema sería: $\left.\begin{array}{r} 2x=mx \\ x+2y+z=my \\ x+3z=mz \end{array}\right\}$; $\left.\begin{array}{r} (2-m)x=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+(3-m)z=0 \end{array}\right\}$

El sistema es homogéneo, siempre es compatible. Estudiamos su matriz

$$\begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \end{vmatrix} = (2-m)^2 \cdot (3-m) = 0 \;\; ; \;\; m=2 \, , \, m=3$$

Si m = 2 o m = 3 el sistema es compatible indeterminado

Si m ≠ 2 y m ≠ 3 el sistema es compatible determinado

A.3.b) El sistema es homogéneo. La solución es (0,0,0)

A.3.c) Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones y damos a *z* valor paramétrico

$$\left.\begin{array}{r} -x=0 \\ x-y=-\lambda \end{array}\right\} ; (0, \lambda, \lambda)$$

$x+y+x=3$; $0+\lambda+\lambda=3$; $\lambda=\frac{3}{2}$. Esa solución sería $\left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Ejercicio 4.- Se sabe que los puntos $A(-1, 2, 6)$ y $B(1, 4, -2)$ son simétricos respecto de un plano π.

a) [0,75 puntos] Calcula la distancia de A a π.

b) [1,75 puntos] Determina la ecuación general del plano π.

A.4.a) $d(A, \pi) = \frac{d(A, B)}{2} = \frac{\sqrt{74}}{2} \; ud$

A.4.b) Usaremos el vector $\vec{AB}$ como vector normal al plano, y el punto medio entre A y B: M

$\vec{AB} = (2, 2, -8)$; $M(0, 3, 2)$

$\pi: 2x + 2y - 8z + D = 0$. Sustituimos M: $6 - 16 + D = 0 ; D = 10$

$\pi: 2x + 2y - 8z + 10 = 0$

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x+xe^{-x}$

a) [1,25 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $x-y+1=0$.

b) [1,25 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

B.1.a) Pendiente de la recta: $m=1$.

$f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}$.

Buscamos el punto: $f'(x)=1$; $e^{-x}-xe^{-x}=0$; $(1-x)e^{-x}=0$; $x=1$. $f(1)=1+\frac{1}{e}$.

$t:\quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$f'(1)=1 \quad ; \quad f(1)=1+\frac{1}{e}$

$t:\quad y=1(x-1)+1+\frac{1}{e} \quad ; \quad y=x+\frac{1}{e}$

B.1.b) $f(x)=x+\frac{x}{e^x}$ Dom(f) = ℝ. No tiene verticales

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty+\frac{+\infty}{+\infty})=\text{(L'Hopital en la fracción)}=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{e^x})=+\infty+0=+\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(-\infty+\frac{-\infty}{0})=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$. No tiene horizontales

Oblicuas: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x})=0$. *(este límite se ha hecho antes por L'Hopital)*

Asíntota $y=x$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1+e^{-x})=+\infty$. Por este lado no hay

---

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x}\,dx$ donde $\ln$ denota logaritmo neperiano (sugerencia $t = e^x$).

B.2) Hacemos la integral indefinida: $[t=e^x \;;\; dt=e^x dx \;;\; dx=\frac{dt}{t}]$

$\int \frac{1}{1+e^x}dx=\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}dt=\int \frac{1}{(1+t)\cdot t}dt$. Integral racional

$$\frac{1}{(1+t)t}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{t} \;;\; 1=At+B(1+t) \;;\; A=-1 \;,\; B=1$$

$$\int \frac{1}{(1+t)\cdot t}dt=\int \frac{-1}{t+1}dt+\int \frac{1}{t}dt=-\ln|1+t|+\ln|t|=-\ln|1+e^x|+\ln|e^x|+K$$

Y ahora la integral definida:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}dx=-\ln|1+e^{\ln 2}|+\ln|e^{\ln 2}|+\ln|1+e^0|-\ln|e^0|=-\ln 3+\ln 2+\ln 2-0=\ln\frac{4}{3}$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - z = m \\ my + 3z = 1 \\ 4x + y - mz = 5 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro m.

b) [1 punto] Para $m = 1$ resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea $x = z$.

B.3.a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. r(A) ≥ 2

$|A|=-m^2+4m-3$. $|A|=0 \;;\; m=1\,,\,3$

Estudiamos la ampliada:

$Ap=\begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -m \end{pmatrix}$. $|Ap|=11m-11$

1. Si m ≠ 1 y 3 , r(A) = r(Ap) = n = 3. Sistema compatible determinado

2.1. Si m = 1 , r(A) = r(Ap) = 2 ; n = 3. Sistema compatible indeterminado

2.2. Si m = 3 , r(A) = 2 ; r(Ap) = 3. Sistema incompatible

B.3.b) Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones y pasamos *y* como valor paramétrico:

$$\left.\begin{array}{r} x-z=1 \\ 3z=1-t \end{array}\right\} \quad ; \quad r:\begin{cases} x=\dfrac{4-t}{3} \\ y=t \\ z=\dfrac{1-t}{3} \end{cases}$$

$x=z \ ; \ \dfrac{4-t}{3}=\dfrac{1-t}{3}$. Sin solución , no es posible.

Ejercicio 4.- Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x+y &= 2 \\ z &= 2 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia entre las rectas dadas.

B.4.a) $r:\begin{cases} \vec{u}=(2,0,0) \\ P(0,1,0) \end{cases}$. $s:\begin{cases} x=2-s \\ y=s \\ z=2 \end{cases}$; $s:\begin{cases} \vec{v}=(-1,1,0) \\ Q(2,0,2) \end{cases}$

Tomamos puntos genéricos y hacemos el vector:

$A(2t,1,0)$, $B(2-s,s,2)$; $\overrightarrow{AB}=(2-s-2t,s-1,2)$.

Este vector debe ser perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \end{array}\right\} \ ; \ \left.\begin{array}{r} 4-2s-4t=0 \\ -2+s+2t+s-1=0 \end{array}\right\} \ ; \ \left.\begin{array}{r} t=\dfrac{1}{2} \\ s=1 \end{array}\right\} \ .$$

La recta que se pide es la que pasa por A y B:

$$t:\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,0,2) \\ A(1,1,0) \end{cases} \qquad t:\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2\lambda \end{cases}$$

B.4.b) $d(r,s)=d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=2\ ud$