Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}(x)} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Determina a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x=-1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente 2.

A.1) f es continua en *x = 0* : $\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=c \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-e^{-x}}{sen\, x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2 \end{cases}$

Por tanto, *c = 2*

Máximo relativo en *x = –1* : $f'(x)=\begin{cases} 2ax+b \ , \ si \ \ x<0 \\ f_2'(x) \ \ , \ \ si \ \ x>0 \end{cases}$; $f'(-1)=-2a+b=0$

Recta tg en *x = –2* pendiente *2* : $f'(-2)=-4a+b=2$

Se resuelve el sistema y se obtiene: *a = –1* , *b = –2*

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Considera la función f definida por $f(x)=a\,x\ln(x)-b\,x$ para $x>0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x=1$ y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx=8\ln(2)-9$$

A.2) Extremo relativo en *x = 1* : $f'(x)=a\cdot ln\, x+\dfrac{ax}{x}-b=a\cdot ln\, x+a-b$; $f'(1)=a-b=0$; $a=b$

$$\int f(x)dx=\begin{bmatrix} u=\ln x \ ; \ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=ax\,dx \ ; \ v=\dfrac{ax^2}{2}\end{bmatrix}=\ln x\,\frac{ax^2}{2}-\int\frac{ax}{2}dx-b\frac{x^2}{2}=\ln x\frac{ax^2}{2}-\frac{ax^2}{4}-\frac{bx^2}{2}+K$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\ln 2\cdot 2a-a-2b+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}=2a\ln 2-\frac{9a}{4}=8\ln 2-9 \ ;$$

$$8a\ln 2-9a=32\ln 2-36 \ ; \ a=\frac{32\ln 2-36}{8\ln 2-9}=\frac{4(8\ln 2-9)}{8\ln 2-9}=4$$. Luego *a = b = 4*

Ejercicio 3.- Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,75 puntos] Determina, si existen, los valores de a, b y c para los que las matrices A y B conmutan.

b) [1 punto] Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}.

c) [0,75 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

A.3.a) Conmutar: $A \cdot B = B \cdot A$ A · B B · A Por tanto: c = −1 , b = 0 , a = 0

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A.3.b) $A^2 = I \;\; ; \;\; A^3 = A \;\; ; \;\; A^{2107} = A^{2016} \cdot A = I \cdot A = A \;\; ; \;\; A^{2018} = I$

A.3.c) $|A| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; \exists A^{-1} \;\; ;$ Inversa(A) $A^{-1} = A$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de r y s.

b) [1,5 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

A.4.a) $r : \begin{cases} P(-1,0,-1) \\ \vec{u} = (2,1,3) \end{cases} \;\; ; \;\; s : \begin{cases} x = \dfrac{-5+3\lambda}{2} \\ y = \lambda \\ z = \dfrac{1+\lambda}{2} \end{cases} \;\; ; \;\; s : \begin{cases} Q\left(\dfrac{-5}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \vec{v} = (3,2,1) \end{cases}$

$rang(\vec{u}, \vec{v}) = rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Las rectas son no paralelas

$rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$. Las rectas se cruzan

A.4.c) $d(r,s) = \dfrac{|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \dfrac{9}{|(-5,7,1)|} = \dfrac{9}{\sqrt{75}}$

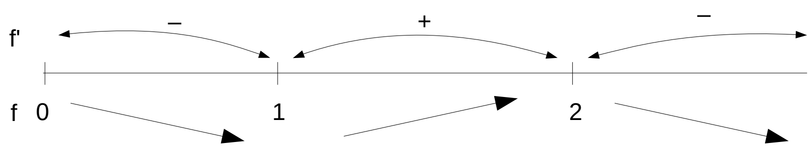
Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = a\ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

a) [1,5 puntos] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) [1 punto] ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

B.1.a) $f'(x)=\frac{a}{x}+2bx+1$; $f'(1)=a+2b+1=0$; $f'(2)=\frac{a}{2}+4b+1=0$; $a=\frac{-2}{3}$, $b=\frac{-1}{6}$

B.1.b) $f'(x)=\frac{-2}{3x}-\frac{x}{3}+1$



Tiene un mínimo relativo en *x = 1* y un máximo relativo en *x = 2*

Ejercicio 2.- Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-2x}$.

a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$.

b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.

c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

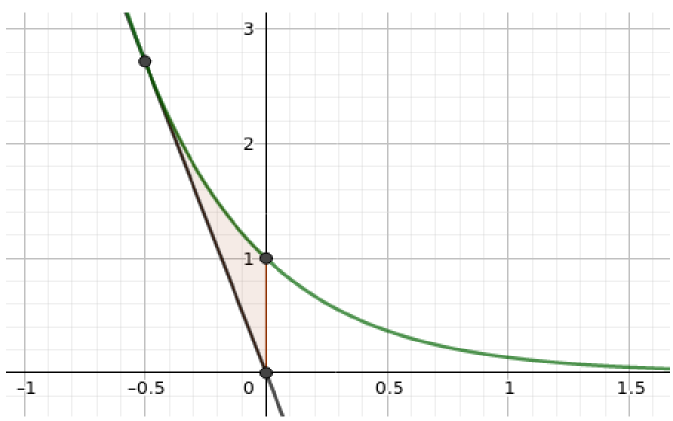
B.2.a) Recta tangente: $m=-2e$; $f'(x)=-2e^{-2x}$; $-2e^{-2x}=-2e$; $e^{-2x}=e^1$; $x=\frac{-1}{2}$;

$y=e^{-2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)}=e$. El punto pedido es: $\left(\frac{-1}{2}, e\right)$

B.2.b) La función es una exponencial decreciente, con asíntota horizontal *y = 0* por +∞.

Tenemos ya el punto $\left(\frac{-1}{2}, e\right)$. Sacamos otro: x = 0 , y = 1

En la recta ya tenemos el punto $\left(\frac{-1}{2}, e\right)$. Sacamos otro: *x = 0* , *y = 0*



Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

B.2.b) $\int_{\frac{-1}{2}}^{0}(e^{-2x}+2ex)\,dx=\left[\frac{-1}{2}e^{-2x}+e\,x^2\right]_{\frac{-1}{2}}^{0}=\left(\frac{-1}{2}+\frac{e}{2}-\frac{e}{4}\right)u^2$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ \quad\; y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [1 punto] Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

B.3.a) Hacemos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. $r(A) \geq 2$

Buscamos si tiene rango 3: $|A| = 0$. No depende de m : $r(A) = 2$

Veamos la matriz ampliada: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = 2m - 2m^2 = 0 \;\rightarrow\; m = 0 \;,\; m = 1$

1. Si m ≠ 0 y m ≠ 1 : r(A) = 2 , r($\overline{A}$) = 3 . Sistema incompatible

2. Si m = 0 o m = 1 : r(A) = 2 , r($\overline{A}$) = 2 , n = 3. Sistema compatible indeterminado

B.3.b) $\left.\begin{array}{r} x+y=1-t \\ y=1+t \\ z=t \end{array}\right\}$; $\left\{\begin{array}{l} x=-2t \\ y=1+t \\ z=t \end{array}\right.$.

z = 2 : Solución (−4 , 3 , 2)

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + nz & = & -2 \\ y - z & = & -3 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Halla los valores de m y n para los que r y s se cortan perpendicularmente.

b) [1 punto] Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s.

B.4.a) $r:\begin{cases} P(1,-1,0) \\ \vec{u}=(2,m,1) \end{cases}$; $s:\begin{cases} x=-2-n\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$; $s:\begin{cases} Q(-2,-3,0) \\ \vec{v}=(-n,1,1) \end{cases}$

Los vectores deben ser perpendiculares: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2n+m+1=0$

Las rectas deben cortarse: $rang(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})=0$; $\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$; $-3m+2n+7=0$

Resolvemos el sistema: $m=4$, $n=\frac{5}{2}$

B.4.b) Si m = 3 , n = 1 : $rang(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})=-3m+2n+7=0$. Las rectas se cortan

Para sacar el plano tomamos un punto de una de ellas y los vectores directores

$$\pi:\begin{cases} P(1,-1,0) \\ \vec{u}=(2,3,1) \\ \vec{v}=(-1,1,1) \end{cases} \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ x-1 & y+1 & z \end{vmatrix}=0 \; ; \; 2x-3y+5z-5=0$$