Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-x}{x-\operatorname{sen}(x)}$$

A.1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,x-x}{x-sen\,x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\text{L'hop } =\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2\,x}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\text{L'hop } =\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2tg\,x(1+tg^2\,x)}{sen\,x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\text{L'hop}$

$=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(1+tg^2\,x)^2+2tg\,x\cdot 2tg\,x\cdot(1+tg^2\,x)}{\cos x}=2$

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=-x^2-x+3$ y $g(x)=|x|$.

a) [1,25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

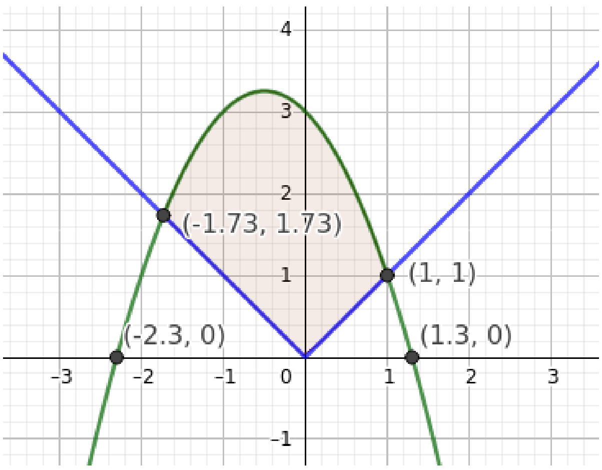
A.2.a) Cortes con los ejes de la parábola:

$x=0 \;\;,\;\; y=3$

$y=0 \;\;,\;\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\approx 1{,}3\,;-2{,}3$

Cortes entre las funciones: $f(x)=x \;\;;\;\; x=1 \;\;,\;\; y=1 \;\;.\;\; f(x)=-x \;\;;\;\; x=-\sqrt{3} \;\;,\;\; y=\sqrt{3}$

Con estos puntos ya podemos dibujar



A.2.b) Área $=\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{0}(-x^2-x+3-(-x))\,dx+\int_0^1(-x^2-x+3-x)\,dx=\left[\frac{-x^3}{3}+3x\right]_{-\sqrt{3}}^{0}+\left[\frac{-x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+3x\right]_0^1=$

$=\dfrac{-\sqrt{3}^3}{3}+3\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}-1+3 \;\approx\; 5{,}13u^2$

Ejercicio 3.- Considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$. Sabiendo que el determinante de M es 2, calcula los siguientes determinantes e indica las propiedades que utilices:

a) [0,75 puntos] El determinante de la matriz $5M^4$.

b) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **c) [1 punto]** $\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix}$

A.3.a) Determinante de un producto: $|k \cdot A_3| = k^3 \cdot |A|$, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Por tanto $|5\,M^4| = 2000$

A.3.b) Una fila se ha dividido por 3, el determinante se divide por 3. Se han intercambiado dos filas, el determinante cambia de signo. Por tanto $|P| = -\dfrac{2}{3}$

A.3.c) Se hace la traspuesta, el determinante no varía. Se ha cambiado una línea por una combinación lineal de otras dos, el determinante no varía. Por tanto $|Q| = 2$

Ejercicio 4.- Sea r la recta que pasa por los puntos $A(3,6,7)$ y $B(7,8,3)$ y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} x - 4y - z &= -10 \\ 3x - 4y + z &= -2 \end{cases}$$

a) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de r y s.

b) [1,25 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

A.4.a) Pasamos a ecuciones paramétricas:

$$r : \begin{cases} A(3,6,7) \\ \overrightarrow{AB} = (4,2,-4) \end{cases} , \quad \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 6 + 2\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases} . \quad s : \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = \dfrac{7}{2} - \dfrac{\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} , \quad \begin{cases} C(4, \dfrac{7}{2}, 0) \\ \vec{v} = (-2,-1,2) \end{cases}$$

Los vectores directores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Haciendo el apartado b) tendremos la respuesta final

A.4.b) $$d(r,s) = d(A,s) = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & \dfrac{-5}{2} & -7 \\ -2 & -1 & 2 \end{matrix} \right\|}{|(-2,-1,2)|} = \frac{|(-12,12,-6)|}{3} = 6u$$

La solución al apartado a) es que las rectas son paralelas disjuntas

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros/m^2 para los laterales y de 24 euros/m^2 para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.

B.1) *x* : lado de la base cuadrada ; *y* : altura de la caja . *(x , y > 0)*

Volumen : $V=x^2\cdot y$

Precio: $4\cdot 18\cdot x\cdot y+24\cdot x^2=50$. Despejamos *y* : $y=\dfrac{50-24x^2}{72x}$

$V=x^2\dfrac{50-24x^2}{72x}=\dfrac{50x-24x^3}{72}$. Buscamos el máximo:

$V'=\dfrac{50-72x^2}{72}$; $V'=0$; $x=\sqrt{\dfrac{50}{72}}=\sqrt{\dfrac{25}{36}}=\dfrac{5}{6}$

$V''=\dfrac{-144x}{72}$. $V''(\dfrac{5}{6})<0 \rightarrow$ *Máximo*

Las dimensiones son: base $\dfrac{5}{6}m$, altura $\dfrac{5}{9}m$.

Ejercicio 2.- Se sabe que la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax} & \text{si } 0\le x\le 8\\[4pt] \dfrac{x^2-32}{x-4} & \text{si } x>8\end{cases}$$

es continua.

a) [0,5 puntos] Determina a.

b) [2 puntos] Para $a=8$, calcula $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$.

B.2.a) Debe ser continua en x = 8 : $\begin{matrix} f(8)=\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\sqrt{8a} \\ \lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=8\end{matrix}$; $\sqrt{8a}=8$, $a=8$

B.2.b) $\displaystyle\int_0^8\sqrt{8x}\,dx+\int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}dx=I_1+I_2$

$$I_1=\left[\sqrt{8}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8=\left[2\sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^8=\frac{128}{3}$$

La segunda es una integral racional. Hacemos la división:

$$I_2=\int_8^{10}\left(x+4-\frac{16}{x-4}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+4x-16\ln(x-4)\right]_8^{10}=50+40-16\cdot\ln 6-32-32+16\cdot\ln 4=26-16\ln\frac{4}{6}$$

La integral completa vale $\frac{128}{3}+26-16\ln\frac{4}{6}=\left(\frac{206}{3}-16\ln\frac{2}{3}\right)u^2$

Ejercicio 3.- Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] Halla, si existe, la inversa de A.

b) [1,25 puntos] Determina los valores de m tales que $(A-mI)$ tiene inversa (I es la matriz identidad).

c) [0,5 puntos] Calcula el rango de $(A-2I)$.

B.3.a) $|A|=4 \rightarrow \exists A^{-1}$. Inversa(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$$

B.3.b) $A-m\cdot I$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}-m & -1 & -2\\ 0 & -m+2 & 0\\ 1 & 1 & -m+3\end{pmatrix}$$

$|A-mI|=0$;

$-m^3+5m^2-8m+4=0$

$m=\ 1\ ,\ 2$

Si $m\neq 1$ y $m\neq 2$ la matriz tendrá inversa

B.4.c) 1. Si $m\neq 1$ y $m\neq 2$: r(A – mI) = 3

2.1. Si $m=1$: $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \rightarrow$ r(A – mI) = 2

2.2. Si $m=2$: $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \rightarrow$ r(A – mI) = 2

Ejercicio 4.-

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(0,1,0)$ y es perpendicular a la recta r dada por $x+1=\frac{y+2}{2}=z-1$.

b) [1,25 puntos] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano de ecuación $2x+3y+4z=12$ con los ejes coordenados.

B.4.a) Utilizamos el vector director de la recta como normal al plano: $\pi:(A(0,1,0)\ ,\ \vec{n}=(1,2,1))$;

$\pi: x+2y+z+D=0$. Sustituimos A: $2+D=0$, $D=-2$

$\pi: x+2y+z-2=0$

B.4.b) Puntos de corte: A(0,0,3) , B(0,4,0) , C(6,0,0)

Área del triángulo: $A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|(-12,-18,-24)|=3\sqrt{29}\ u^2$