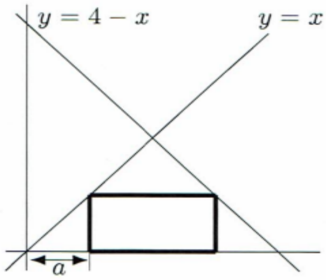
Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.-
Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 - x$. Se pide:

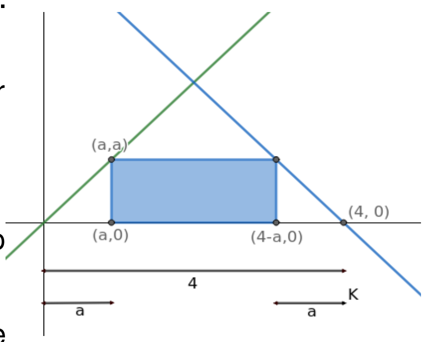


a) [0,25 puntos] Halla la altura del rectángulo en función de a (ver la figura).

b) [1 punto] Halla la base del rectángulo en función de a.

c) [1,25 puntos] Encuentra el valor de a que hace máximo el área del rectángulo.

A.1.a) Como un vértice está en la recta $y=x$, se hace $x=a \rightarrow y=a$. La altura es *h = a*



A.1.b) El punto de corte de la recta $y=4-x$ con el eje OX es (4 , 0). Por tanto, la base del rectángulo es

$$b=4-2a$$

A.1.c) Área: base · altura: $f(a)=(4-2a)\cdot a$. Hay que buscar el máximo de esa función

$f(a)=4a-2a^2$; $f'=4-4a$; $f'=0 \rightarrow a=1$. Comprobamos que es mínimo con la segunda derivada

$$f''(a)=-4 \;;\; f''(1)<0 \rightarrow a=1 \quad es \;\; un \;\; máximo$$

El rectángulo debe medir *base = 2 ; altura = 1*

Ejercicio 2.- Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{2-x}$.

a) [0,75 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.

b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta $x+y=3$.

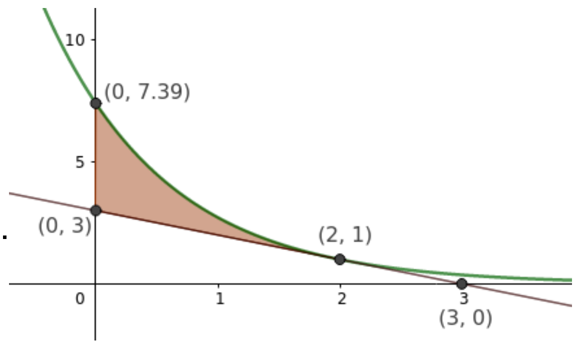
c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto indicado.

A.2.a) $f(x)=e^{2-x}$; $f'(x)=-e^{2-x}$

$$t: \quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(2)=-1 \quad ; \quad f(2)=1$$

$$t: \quad y=-(x-2)+1 \quad ; \quad y=-x+3$$



A.2.b) La función es una exponencial decreciente. $\lim_{x\to-\infty} f=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f=0$, $f(0)=e^2$, $f(2)=1$

A.2.c)

$$Área=\int_0^2 (e^{2-x}+x-3)\,dx=$$

$$=\left[-e^{2-x}+\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^2=-1+2-6+e^2=(e^2-5)\,u^2$$

Ejercicio 3.- Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1,25 puntos] Discute el rango de A según los valores del parámetro λ.

b) [1,25 puntos] Para $\lambda = -2$, estudia y resuelve el sistema dado por $AX = B$.

A.3.a) Calculamos el determinante de *A* : $|A| = 2\lambda^3 - 6\lambda + 4$

Se iguala a 0 y se resuelve la ecuación (Rufini) : $\lambda = -2 \,,\, 1$

Caso 1: Si $\lambda \neq -2 \,,\, 1$, *r(A) = 3*

Caso 2: Si $\lambda = -2$. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, *r(A) = 2*

Caso 3: Si $\lambda = 1$. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; todos los menores de orden *2* valen *0* , *r(A) = 1*

A.3.b) Hay que terminar de estudiar la compatibilidad del sistema. Hacemos el rango de la matriz ampliada

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $|\bar{A}| = 0$. *r($\bar{A}$) = 2* . El sistema es compatible indeterminado

Utilizamos lo anterior. Eliminamos la tercera ecuación y damos a *z* valor paramétrico: *t*

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = -1 + 2t \\ 2x + 2y = 1 - t \end{array}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -1+2t & -1 \\ 1-t & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-1}{6} + \frac{1}{2}t \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1+2t \\ 2 & 1-t \end{vmatrix}}{6} = \frac{2}{3} - t \quad ; \quad z = t$$

Ejercicio 4.- Considera el plano π de ecuación $x+2y+z=6$.

a) [1 punto] Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

b) [0,5 puntos] Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto a π.

c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.

A.4.a) Utilizamos el vector normal al plano: $\vec{n}=(1,2,1)$. $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

A.4.b) Calculamos el punto de corte entre la recta y el plano: $\lambda+4\lambda+\lambda=6$; $\lambda=1 \rightarrow M(1,2,1)$

Para el simétrico usamos la fórmula del punto medio:

$$\frac{0+p_1'}{2}=1 \rightarrow p_1'=2 \quad , \quad \frac{0+p_2'}{2}=2 \rightarrow p_2'=4 \quad , \quad \frac{0+p_3'}{2}=1 \rightarrow p_3'=2 \quad . \quad O'(2,4,2)$$

A.4.c) Corte eje X : y = 0 , z = 0 , x = 6. Punto *A(6 , 0 , 0)*. Vector $\overrightarrow{OA}=(6,0,0)$

Corte eje Y : x = 0 , z = 0 , y = 3. Punto B*(0 , 3 , 0)*. Vector $\overrightarrow{OB}=(0,3,0)$

Corte eje Z : x = 0 , y = 0 , z = 6. Punto C*(0 , 0 , 6)*. Vector $\overrightarrow{OC}=(0,0,6)$

Volumen del tetraedro: $V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix}\right\|=18\ ud^3$

Ejercicio 1.- Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} -x\,e^{x-1} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x\,e^{x-1} & \text{si} \quad 0<x\leq 1 \\ x\,e^{1-x} & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$$

a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en $x=0$ y en $x=1$.

b) [1,5 puntos] Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f.

B.1.a) Primero la continuidad:

x = 0. $\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0 \end{cases}$. Es continua. x = 1. $\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1 \end{cases}$. Es continua

Ahora la derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} (-1-x)e^{x-1} \ , & si \quad x<0 \\ (1+x)e^{x-1} \ , & si \quad 0<x<1 \\ (1-x)e^{1-x} \ , & si \quad x>1 \end{cases}$

x = 0. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-e^{-1} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=e^{-1} \end{cases}$. No es derivable. x = 1. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=0 \end{cases}$. No es derivable

Ejercicio 1.- Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} -x\,e^{x-1} & \text{si} \quad x\le 0\\ x\,e^{x-1} & \text{si} \quad 0<x\le 1\\ x\,e^{1-x} & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$$

a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en $x=0$ y en $x=1$.

b) [1,5 puntos] Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f.

B.1.b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=(-\infty\cdot 0)$ (L'Hopital) $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{e^{-x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{-e^{-x+1}}=\left(\dfrac{-1}{-\infty}\right)=0$. Asíntota *y = 0*

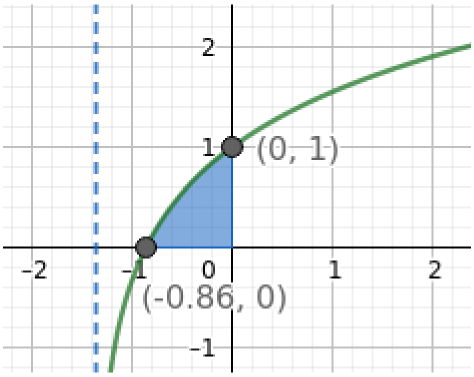
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty\cdot 0)$ (L'Hopital) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{-1+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{-1+x}}=\left(\dfrac{1}{+\infty}\right)=0$. Asíntota *y = 0*

Ejercicio 2.- Considera la función $f:\left(-\frac{e}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(2x+e)$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

a) [0,75 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

b) [1,75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenadas.

B.2.a) Corte en Y: $x=0$, $y=1$.



Cortes en X: $y=0$, $\ln(2x+e)=0$, $2x+e=e^0=1$, $x=\dfrac{1-e}{2}$

Calculamos también los límites en los extremos del dominio:

$\lim\limits_{x\to-\frac{e}{2}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

B.2.b) Haremos primero la integral indefinida:

$$\int\ln(2x+e)\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\ln(2x+e\ \ );\ \ du=\dfrac{2}{2x+e}dx\\ dv=dx\ \ ;\ \ v=x\end{array}\right]=x\cdot\ln(2x+e)-\int\frac{2x}{2x+e}dx=x\cdot\ln(2x+e)-I_1$$

I_1 es racional:

$$I_1=\int\frac{2x}{2x+e}dx\int\left(1-\frac{e}{2x+e}\right)dx=x-\frac{e}{2}\ln(2x+e)$$

$$\acute{A}rea=\int_{\frac{1-e}{2}}^{0}\ln(2x+e)\,dx=$$

$$=\left[x\ln(2x+e)-x+\frac{e}{2}\ln(2x+e)\right]_{\frac{1-e}{2}}^{0}=\frac{e}{2}+\frac{1-e}{2}=\frac{1}{2}\ ud^2$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\1&0&1\\-1&2&-2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\quad \text{y} \quad D=(4\ \ -5\ \ 6).$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que $A^2X-BA+X=CD$.

B.3) $A^2X-BA+X=CD$; $A^2X+X=CD+BA$; $(A^2+I)X=CD+BA$; $X=(A^2+I)^{-1}(CD+BA)$

$A^2X+X=A^2X+IX$ sacando factor común

C · D

$$\rightarrow \begin{pmatrix}4&-5&6\\-8&10&-12\\12&-15&18\end{pmatrix}$$

B · A

$$\rightarrow \begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&-1&0\\1&2&-2\end{pmatrix}$$

C · D + B · A

$$\rightarrow \begin{pmatrix}6&-4&4\\-9&9&-12\\13&-13&16\end{pmatrix}$$

A^2

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

A^2+I

$$\rightarrow \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Inversa (A^2+I)

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

X := (Inversa $(A^2+I)\cdot(C\cdot D+B\cdot A)$)

$$\rightarrow X := \begin{pmatrix}3&-2&2\\-\frac{9}{2}&\frac{9}{2}&-6\\\frac{13}{2}&-\frac{13}{2}&8\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv x-2=y-2=z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=4+t \\ y=4+t \\ z=mt \end{cases}$$

a) [1 punto] Determina m para que r y s sean paralelas.

b) [0,5 puntos] Halla, si existe, un valor de m para el que ambas rectas sean la misma.

c) [1 punto] Para $m=1$, calcula la ecuación del plano que contiene a r y a s.

B.4.a) $r:\begin{cases} A(2,2,0) \\ \vec{u}=(1,1,1) \end{cases}$, $s:\begin{cases} B(4,4,0) \\ \vec{v}=(1,1,m) \end{cases}$

Si *m = 1* los vectores directores son proporcionales, las rectas son paralelas (*disjuntas o coincidentes*)

B.4.b) El vector $\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$ nunca será proporcional al $\vec{u}$ o al $\vec{v}$. Las rectas nunca serán coincidentes

B.4.c) $\pi:\begin{cases} A(2,2,0) \\ \vec{u}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{AB}=(2,2,0) \end{cases}$, $\pi:\begin{cases} x=2+\alpha+2\beta \\ y=2+\alpha+2\beta \\ z=\alpha \end{cases}$