Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- **[2,5 puntos]** Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene en $x=1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

A.1) "tiene en *x = 1* un punto de derivada nula" $\rightarrow$ $f'(1)=0$

"que no es extremo relativo" $\rightarrow$ punto de inflexión $\rightarrow$ $f''(1)=0$

"pasa por *(1 , 1)*" $\rightarrow$ $f(1)=1$

$f'(x)=3x^2+2ax+b \quad ; \quad f''(x)=6x+2a$

$f''(1)=6+2a=0 \rightarrow a=-3$

$f'(1)=3-6+b=0 \rightarrow b=3$

$f(1)=1-3+3+c=1 \rightarrow c=0$

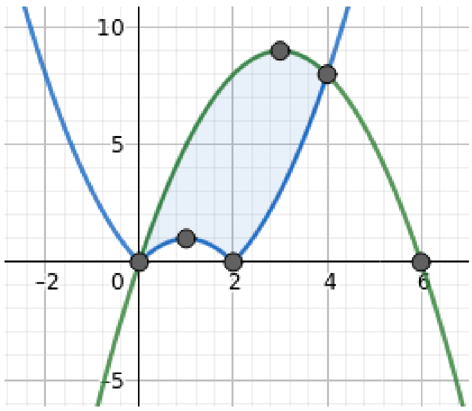
Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=|x^2-2x|$.

a) **[1,25 puntos]** Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

A.2.a) Cortes con los ejes de *f* : (0 , 0) (6 , 0). Vértice de *f* : (3 , 9)

$$g(x)=\begin{cases} x^2-2x \ , \ x\le 0 \\ -x^2+2x \ , \ 0<x<2 \\ x^2-2x \ , \ x\ge 2 \end{cases}$$



Cortes con los ejes de *g* : (0 , 0) (2 , 0). Vértice de *g* : (1 , 1)

Cortes entre ellas:

$$\begin{cases} 6x-x^2=x^2-2x \rightarrow x=0 \ , \ x=4 \rightarrow (0\,,0) \ , \ (4\,,8) \\ 6x-x^2=-x^2+2x \rightarrow x=0 \rightarrow (0\,,0) \end{cases}$$

A.2.b) $$Área=\int_0^2 (6x-x^2+x^2-2x)\,dx+\int_2^4 (6x-x^2-x^2+2x)\,dx=$$

$$=\left[2x^2\right]_0^2+\left[4x^2-2\frac{x^3}{3}\right]_2^4=8+64-\frac{128}{3}-16+\frac{16}{3}=\frac{56}{3}\ u^2$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & (m+3)z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 3m \\ 2x & + & 4y & + & 3(m+1)z & = & 8 \end{array}\right.$$

a) **[1,75 puntos]** Discútelo según los valores del parámetro m.

b) **[0,75 puntos]** Resuelve el sistema para $m=-2$.

A.3.a) El primer menor de orden 2 nos asegura rango 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Calculamos el determinante de orden 3: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{pmatrix}$ $|A| = -m+3$

Caso 1. Si $m \neq 3$, r(A) = r($\bar{A}$) = n = 3. Sistema compatible determinado.

Caso 2. Si $m=3$. Estudiamos el rango de la matriz ampliada: $Ap := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ $|Ap| = -2$

Tenemos un sistema incompatible

A.3.b) Si $m=-2$ tenemos un sistema compatible determinado.

Resolvemos por el método de Cramer:

$Ax := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -6 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ $x = \frac{|Ax|}{|A|} = \frac{-73}{5}$

$Ay := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ $y = \frac{|Ay|}{|A|} = \frac{45}{5} = 9$

$Az := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ $z = \frac{|Az|}{|A|} = \frac{-2}{5}$

Ejercicio 4.- Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por

$$x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$$

a) [1,25 puntos] Determina el punto simétrico de P respecto de r.

b) [1,25 puntos] Calcula el punto de r que equidista de P y Q.

A.4.a) $r:\begin{cases} A(5,0,-2) \\ \vec{u}=(1,1,-2) \end{cases}$.

Con P y $\bar{u}$ obtenemos un plano perpendicular a r que pase por P: $\pi: x+y-2z+K=0$.

Sustituimos P: $\pi: 1+2+K=0 \rightarrow K=-3$

$$\pi: x+y-2z-3=0$$

Calculamos el punto de corte entre π y r:

Punto genérico de r: $R(5+t, t, -2-2t)$. Lo sustituímos en π :

$5+t+t+4+4t-3=0 \rightarrow t=-1$. $R(4,-1,0)$

Calculamos el simétrico de P con la fórmula del punto medio:

$\frac{1+p_1'}{2}=4 \rightarrow p_1'=7$; $\frac{0+p_2'}{2}=-1 \rightarrow p_2'=-2$; $\frac{-1+p_3'}{2}=0 \rightarrow p_3'=1$

El simétrico es: $P'(7,-2,1)$

A.4.b) Tomamos de nuevo un punto genérico de r: $R(5+t, t, -2-2t)$

Calculamos los vectores e imponemos la distancia:

$\overrightarrow{PR}=(4+t, t, -1-2t)$, $\overrightarrow{QR}=(3+t, t-1, -3-2t)$

$|\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{QR}|$; $\sqrt{6t^2+12t+17}=\sqrt{6t^2+16t+19}$;

$6t^2+12t+17=6t^2+16t+19 \rightarrow t=\frac{-1}{2}$. El punto pedido es: $M(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$

SOLUCIONES
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**
Examen Junio. Año 2018

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es derivable.

B.1) Debe ser continua: $\begin{cases} f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3 - k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{2}{k} \end{cases}$; $3 - k = \dfrac{2}{k}$; $k = 1\,,\,2$

Debe ser derivable: $f'(x) = \begin{cases} -2kx & , \ x < 1 \\ \dfrac{-2}{kx^2} & , \ x > 1 \end{cases}$; $\begin{matrix} f'(1^-) = -2k \\ f'(1^+) = \dfrac{-2}{k} \end{matrix}$.

Las derivadas laterales son iguales solo en el caso $k = 1$

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -\dfrac{x^2}{4}$ y $g(x) = 3 - x^2$.

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

b) [0,75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) [0,75 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

B.2.a) Hay un error en el enunciado. Se deben intercambiar *f* y *g*

$f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = \dfrac{-x^2}{4}$, $f'(x) = -2x^2$, $g'(x) = \dfrac{-x}{2}$

$t: \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(1) = -2 \quad ; \quad f(1) = 2$

$t: \quad y = -2(x - 1) + 2 \quad ; \quad y = -2x + 4$

La pendiente de esta tangente es *–2* . Calculamos un punto de *g* con la misma pendiente:

$\dfrac{-x}{2} = -2 \rightarrow x = 4$

Calculamos la recta tangente a *g* en ese punto:

$t: \quad y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

$g'(4) = -2 \quad ; \quad g(4) = -4$

$t: \quad y = -2(x - 4) - 4 \quad ; \quad y = -2x + 4$

Se obtiene el mismo resultado. Por tanto, la recta es tangente a las dos curvas.
En *x = 1* para *f* y en *x = 4* para *g* : punto *(4 , –4)*

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -\dfrac{x^2}{4}$ y $g(x) = 3 - x^2$.

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

b) [0,75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

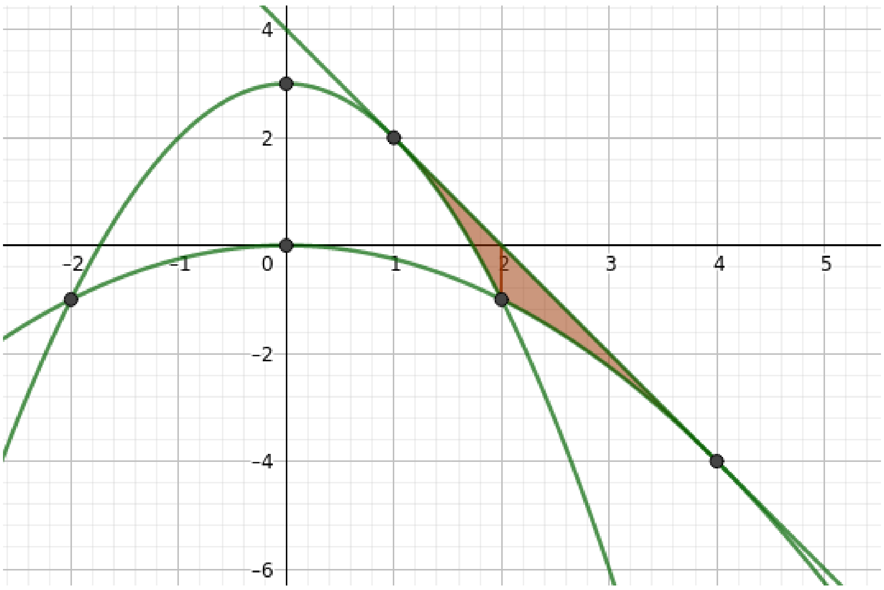
c) [0,75 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

B.2.b) Hay un error en el enunciado. Se deben intercambiar *f* y *g*: $f(x)=3-x^2$, $g(x)=\dfrac{-x^2}{4}$

La recta es la tangente anterior a ambas curvas. Las corta a *f* en *(1 , 2)* y a *g* en *(4, –4)*

Calculamos los cortes entre las curvas: $3-x^2=\dfrac{-x^2}{4} \rightarrow x=\pm 2$. Puntos $(2,-1),(-2,-1)$

Calculamos el vértice de *f*: $(0,3)$ y el de *g*: $(0,0)$



B.2.c) $$Área=\int_1^2 (4-2x-3+x^2)\,dx+\int_2^4 \left(4-2x+\frac{x^2}{4}\right)dx=$$

$$=\left[x-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_1^2+\left[4x-x^2+\frac{x^3}{12}\right]_2^4=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\ u^2$$

Ejercicio 3.-

a) [1,5 puntos] Justifica que es posible hacer un pago de $34,50$ euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
- se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
- tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

B.3.a) x: monedas de 0,50 , y: monedas de 1 , z: monedas de 2

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}5x+y+2z=34{,}5 \\ x+y+z=30 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\}$$ Estudiamos la compatibilidad del sistema. $|A|=3\neq 0.$

r(A) = r(A) = n. El sistema es compatible determinado. El pago se puede hacer de una úinica forma.

Resolvemos el sistema por el método de Cramer o el de Gauss:

$$\mathrm{Ax} := \begin{pmatrix} 34.5 & 1 & 2 \\ 30 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x=\frac{|Ax|}{|A|}=\frac{21}{3}=7$$

$$\mathrm{Ay} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 34.5 & 2 \\ 1 & 30 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y=\frac{|Ay|}{|A|}=\frac{45}{3}=15$$

$$\mathrm{Az} := \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 34.5 \\ 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad z=\frac{|Az|}{|A|}=\frac{24}{3}=8$$

El pago puede hacerse utilizando 7 monedas de 50 c, 15 de 1€ y 8 de 2€.

B.3.b) El sistema sigue siendo compatible determinado. Pero las soluciones ahora son:

$$\mathrm{Ax} := \begin{pmatrix} 35 & 1 & 2 \\ 30 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x=\frac{|Ax|}{|A|}=\frac{20}{3}$$ No son soluciones enteras. El problema no tiene solución.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x+2y+z=5$.

a) **[1,75 puntos]** Calcula el punto simétrico de P respecto de π.

b) **[0,75 puntos]** Calcula la distancia de P a π.

B.4.a) Calculamos una recta perpendicular a π que pase por *P*: $\vec{n}=(3,2,1)$ $\quad r:(2,-1,3)+t(3,2,1)$

Punto genérico de *r*: $R(2+3t,-1+2t,3+t)$. Imponemos que ese punto esté en π :

$$3(2+3t)+2(-1+2t)+(3+t)=5 \rightarrow t=\frac{-1}{7} \rightarrow R\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)$$

Calculamos el simétrico de *P* respecto a *R* usando el punto medio:

$$\frac{2+p_1'}{2}=\frac{11}{7} \rightarrow p_1'=\frac{8}{7} \quad ; \quad \frac{-1+p_2'}{2}=\frac{-9}{7} \rightarrow p_2'=\frac{-11}{7} \quad ; \quad \frac{3+p_3'}{2}=\frac{20}{7} \rightarrow p_3'=\frac{19}{7}$$

$$P'\left(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7}\right)$$

B.4.b) $d(P,\pi)=d(P,R)=\sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2+\left(\frac{-2}{7}\right)^2+\left(\frac{-1}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{7}\ u$