EJERCICIO 1

a) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) **(1 punto)** Si A es una matriz con tres filas y dos columnas, determine razonadamente la dimensión que deben tener las matrices B, C y D para que se puedan efectuar las siguientes operaciones:

$$2A - 3B \qquad A \cdot A^t - C^2 \qquad A \cdot D$$

A.1.a) $A \cdot X = C^2 \cdot D \ \rightarrow \ X = A^{-1} \cdot C^2 \cdot D$; $C^2 = I \ \rightarrow \ C^2 \cdot D = D$

Inversa(A) $\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{2}{13} \end{pmatrix}$

X := Inversa(A) D $\rightarrow$ **X :=** $\begin{pmatrix} \frac{23}{13} \\ \frac{2}{13} \end{pmatrix}$

A.1.b) $A_{3\times2}$. $2A_{3\times2} - 3B_{3\times2}$. B debe tener las mismas dimensiones que A

$(A_{3\times2} \cdot A^t_{2\times3})_{3\times3} - (C_{3\times3} \cdot C_{3\times3})_{3\times3}$. C debe tener 3 filas y 3 columnas

$A_{3\times2} \cdot D_{2\times n} = (A \cdot D)_{3\times n}$. D debe tener 2 filas y cualquier número de columnas.

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{x-4} & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 7x - 10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

b) **(0.75 puntos)** Calcule los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.

c) **(0.5 puntos)** Calcule las asíntotas de f, en caso de que existan.

A.2.a) El primer trozo es una racional, continua y derivable en su dominio: (−∞ , 3)

El segundo trozo es una polinómica, continua y derivable en su dominio: (3 , +∞).

Hay que estudiar *x = 3*

Continuidad: $\begin{matrix} f(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to x^-} f(x) = 2 \end{matrix}$. La función es continua en su dominio: ℝ

Derivabilidad: $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-4)^2} \ , & si\, x < 3 \\ -2x + 7 \ , & si \ \ x > 3 \end{cases}$; $\begin{matrix} f'(3^-) = 1 \\ f'(3^+) = 1 \end{matrix}$. La función es derivable en su dominio: ℝ

A.2.b) Cortes en el eje Y: $f(x)=0 \rightarrow \begin{cases} x=\nexists \\ x=5 \end{cases}$. Punto (5 , 0)

Corte en el eje X: $x=0 \rightarrow f(0)=\frac{5}{4}$. Punto (0 , 5/4)

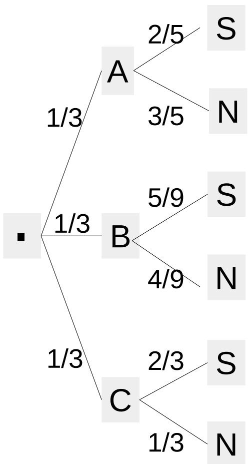
A.2.c) El primer trozo es una racional. Tendría asíntota vertical en *x = 4* , pero en este caso no.

Tendría asíntota horizontal, pero en este caso solo por −∞. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$. Asíntota en *y = 1*

El segundo trozo es polinómico. No tiene asíntotas.

EJERCICIO 3
Se ha realizado un referéndum en el que se ha convocado a la ciudadanía a expresar con "SÍ" o con "NO" su opinión sobre cierta cuestión. En una determinada mesa electoral hay tres urnas que contienen las siguientes papeletas: la urna A tiene 200 papeletas con "SÍ" y 300 con "NO", la urna B, 500 "SÍ" y 400 "NO" y la urna C contiene 200 "SÍ" y 100 "NO".
Se elige una urna al azar y de ella se extrae aleatoriamente una papeleta.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea un "SÍ".
b) **(1 punto)** Si la papeleta extraída es "NO", calcule la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.



A.3.a) $p(S)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=0{,}54$

A.3.b) $p(A/N)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{0{,}46}=0{,}44$

EJERCICIO 4
La calificación que obtiene el alumnado en una determinada asignatura sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica 3 puntos.

a) **(1.5 puntos)** Se toma una muestra aleatoria simple de 100 alumnos, resultando una calificación media de 5.7 puntos. Calcule un intervalo de confianza para estimar μ a un nivel de confianza del 95%.

b) **(1 punto)** Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 0.5 puntos y un nivel de confianza del 99%.

A.4.a) $p(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1+0,95}{2}$; $z_{\alpha/2} = 1,96$

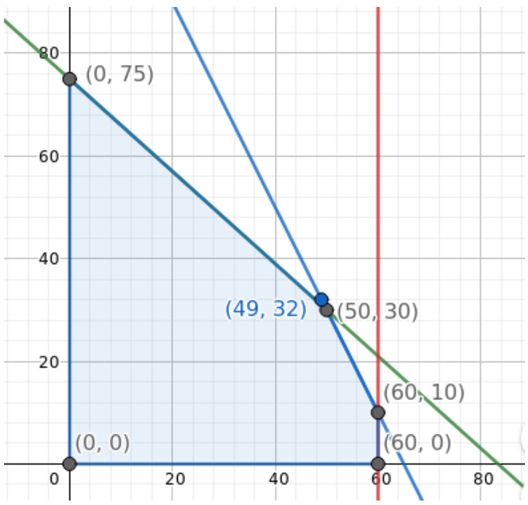
Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5,11 \,;\, 6,29)$

A.4.b) $p(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1+0,99}{2}$; $z_{\alpha/2} = 2,575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = 238,86$; La muestra debe ser de al menos 239 alumnos

EJERCICIO 1
(2.5 puntos) Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B con los que obtiene un beneficio por cada pala de 30 y 20 euros respectivamente. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y 100 g de goma EVA, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono y 50 g de goma EVA. La fábrica dispone diariamente de 7.5 kg de fibra de carbono y 6.5 kg de goma EVA y quiere producir como máximo 60 unidades diarias del modelo A. Calcule cuántas palas de cada modelo tiene que fabricar para que el beneficio sea máximo y determine su importe.
¿Sería posible una producción diaria de 49 palas del modelo A y 32 palas del modelo B?

fibra: $90x + 100y \leq 7500$
goma: $100x + 50y \leq 6500$
modelo A: $x \leq 60$
$x \geq 0$; $y \geq 0$
Beneficio: $B(x, y) = 30x + 20y$



B(0 , 75) = 1500

B(50 , 30) = 2100

B(60 , 10) = 2000

B(60 , 0) = 1800

El máximo beneficio se consigue fabricando 50 unidades del tipo A y 30 del B, siendo este de 2100 €

El punto (49 , 32) no está en la región. Incumple la primera restricción:
$90 \cdot 49 + 100 \cdot 32 = 7610 > 7500$. Se estaría utilizando más fibra de la disponible.

EJERCICIO 2

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones

$$f(x)=e^{5x}\cdot(x^2-5)^3 \qquad g(x)=\frac{(x^3+1)^2}{ln(x^2+2)}$$

b) **(1 punto)** Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\dfrac{x+10}{x+5}$, en el punto de abscisa $x=0$.

B.2.a) $f'(x)=5e^{5x}(x^2-5)^3+e^{5x}\cdot 3\cdot(x^2-5)^2\cdot 2x=e^{5x}(x^2-5)^2(5(x^2-5)+6x)=e^{5x}(x^2-5)^2(5x^2-25+6x)$

$$g'(x)=\frac{2(x^3+1)\cdot 3x^2\cdot\ln(x^2+2)-\dfrac{(x^3+1)^2\cdot 2x}{x^2+2}}{(\ln(x^2+2))^2}=\frac{6x^2\cdot(x^3+1)\cdot\ln(x^2+2)\cdot(x^2+2)-(x^3+1)^2\cdot 2x}{(\ln(x^2+2))^2\cdot(x^2+2)}$$

B.2.b) $h'(x)=\dfrac{x+5-x-10}{(x+5)^2}=\dfrac{-5}{(x+5)^2}$ **;** $t:\quad y=h'(x_0)(x-x_0)+h(x_0)$

$$h'(0)=\frac{-1}{5} \quad ; \quad h(0)=2$$

$$t:\quad y=\frac{-1}{5}(x-0)+2 \quad ; \quad y=\frac{-1}{5}x+2$$

EJERCICIO 3

En una concentración de 250 deportistas hay 120 que juegan al fútbol, 60 que juegan al tenis y 70 que juegan al baloncesto. El 75% de los que juegan al fútbol, el 65% de los que juegan al tenis y el 60% de los que juegan al baloncesto son además aficionados al ciclismo.

Se selecciona al azar uno de los deportistas.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionado al ciclismo?

b) **(1 punto)** Si es aficionado al ciclismo, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al tenis?

	F	T	B	
C	90	39	42	171
C’	30	21	28	79
	120	60	70	250

75% de 120 = 90

65% de 60 = 39

60% de 70 = 42

B.3.a) $p(C)=\dfrac{171}{250}=0{,}684$

B.3.b) $p(T/C)=\dfrac{39}{171}=0{,}228$

EJERCICIO 4
Una cadena de supermercados desea estimar la proporción de clientes que adquiere un determinado producto. Para ello ha tomado una muestra aleatoria simple de 1000 clientes y ha observado que 300 compraban ese producto.

a) **(1.5 puntos)** Halle, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de clientes del supermercado que compra ese producto.

b) **(1 punto)** Si en otra muestra la proporción de clientes que compra ese producto es de 0.25 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 92.5%, calcule el tamaño mínimo de la muestra.

B.4.a) $P[Z \leq z_{\alpha/2}] = \frac{1+p}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$; $\overline{p} = \frac{300}{1000} = 0,3$

Intervalo de confianza para la proporción: $\left(\overline{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}, \overline{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right) = (0,27 ; 0,33)$

B.4.b) $P[Z \leq z_{\alpha/2}] = \frac{1+p}{2} = \frac{1+0,925}{2} = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,78$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$; $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \overline{p}(1-\overline{p}) = 660,43$

La muestra debe ser de al menos 661 clientes