EJERCICIO 1

Se considera la región definida por las siguientes inecuaciones:

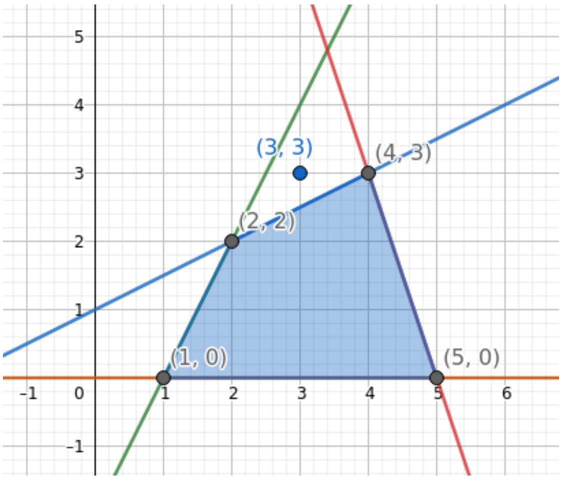
$$2x - y \geq 2 \qquad -x + 2y \leq 2 \qquad 3x + y \leq 15 \qquad y \geq 0$$

a) **(1.8 puntos)** Represéntela gráficamente y determine sus vértices.

b) **(0.2 puntos)** Indique razonadamente si el punto $(3,3)$ pertenece a dicha región.

c) **(0.5 puntos)** ¿En qué puntos de la región anterior la función $F(x,y) = 3x - 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo y cuáles son éstos?

A.1.a)



A.1.b) Según la gráfica, no está en la región.

No cumple la segunda inecuación: $-3+2\cdot 3 \leq 2 \rightarrow$ falso

A.1.c) F(1 , 0) = 3

F(2 , 2) = 2 $\rightarrow$ Mínimo

F(4 , 3) = 6

F(5 , 0) = 15 $\rightarrow$ Máximo

EJERCICIO 2

La velocidad que lleva un móvil, en función del tiempo t, viene dada por la siguiente función:

$$v(t)=\begin{cases}7t^2 & \text{si } 0\le t<1\\ 2t+a & \text{si } 1\le t\le 5\\ -t^2+12t+b & \text{si } 5<t\le 10\end{cases}$$

a) **(1 punto)** Determine a y b para que la función sea continua en los instantes $t=1$ y $t=5$.

b) **(1.5 puntos)** Para $a=5$ y $b=-20$, estudie la derivabilidad en los instantes $t=1$ y $t=5$. ¿En qué momento el móvil alcanza la velocidad máxima?

A.2.a) $v(1)=\lim\limits_{t\to 1^+} v(t)=2+a$

$\lim\limits_{t\to 1^-} v(t)=7$ $\rightarrow$ $2+a=7$ $\rightarrow$ $a=5$

$v(5)=\lim\limits_{t\to 5^-} v(t)=10+a$

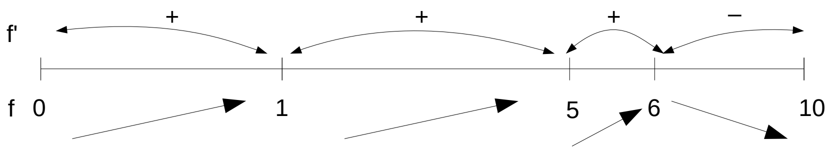
$\lim\limits_{t\to 5^+} v(t)=35+b$ $\rightarrow$ $10+a=35+b$ $\rightarrow$ $b=-20$

A.2.b) $v'(t)=\begin{cases}14t\ , & si\ \ 0\le t<1\\ 2\ , & si\ \ 1<t<5\\ -2t+12\ , & si\ \ 5<t\le 10\end{cases}$

$\begin{array}{l} v'(1^-)=14\\ v'(1^+)=2\end{array}$ $\rightarrow$ No es derivable en *t = 1*

$\begin{array}{l} v'(5^-)=2\\ v'(5^+)=2\end{array}$ $\rightarrow$ Sí es derivable en *t = 5*

Para el máximo igualamos la derivada a 0: $v'(t)=0 \rightarrow \begin{cases}0\ , & si\ \ 0\le t<1\\ \nexists\ , & si\ \ 1<t<5\\ 6\ , & si\ \ 5<t\le 10\end{cases}$



A la vista de este esquema, la velocidad máxima se alcanza en el instante *t = 6*

EJERCICIO 3

El 80% del alumnado de una determinada universidad accede a los estudios que marca como primera opción. De ellos, el 75% termina el Grado, mientras que solo el 40% de los que acceden a estudios que no han marcado como primera opción termina el Grado. Se elige un alumno al azar de esa universidad.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no haya terminado el Grado.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que no accediera a los estudios marcados como primera opción, sabiendo que no ha terminado el Grado.

A.3)

	P	P’	
T	60	8	68
T’	20	12	32
	80	20	100

75% de 80 = 60 ; 40% de 20 = 8

a) $p(T')=\frac{32}{100}=0{,}32$

b) $p(P'/T')=\frac{12}{32}=0{,}375$

EJERCICIO 4

A la salida de unos grandes almacenes se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 clientes, a los que se les ha preguntado por el gasto que han realizado, obteniéndose una media muestral de 110 euros. Se sabe que el gasto sigue una distribución Normal con desviación típica 20 euros.

a) **(0.5 puntos)** ¿Qué distribución de probabilidad sigue la media muestral?

b) **(1 punto)** Obtenga un intervalo de confianza al 90%, para el gasto medio de todos los clientes que han comprado ese día.

c) **(1 punto)** Si deseamos que el error máximo cometido, con el mismo nivel de confianza, sea 2 euros, ¿cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra?

A.4.a) Gasto : $X \rightarrow N(\mu,20)$. Media muestral : $\bar{X} \rightarrow N\left(110,\frac{20}{\sqrt{100}}\right)=N(110,2)$

A.4.b) $p(z\le z_{\alpha/2})=\frac{1+0{,}90}{2}$; $z_{\alpha/2}=1{,}645$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(106{,}71\ ;\ 113{,}29)$

A.4.c) $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=270{,}55$; La muestra debe ser de al menos 271 clientes

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$$B+2C\cdot A \qquad\qquad A-(B\cdot C)^t$$

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la siguiente ecuación matricial: $\frac{1}{5}(B+A\cdot X)=C^t$

B.1.a) $B_{2\times1}+2C_{1\times2}\cdot A_{2\times2}=B_{2\times1}+P_{1\times2}$, no puede hacerse porque para sumar *B* y *P* deben tener la misma dimensión.

$A_{2\times2}-(B_{2\times1}\cdot C_{1\times2})^t$, sí puede hacerse:

m1 = B C

$\rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}$

m2 = Traspone(m1)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$

m3 = A − m2

$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$

B.1.b) $\frac{1}{5}(B+A\cdot X)=C^t \rightarrow A\cdot X=5C^t-B \rightarrow X=A^{-1}\cdot(5C^t-B)$

Inversa(A)

$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

5 · Traspone(C) − B

$\rightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$

Inversa(A) (5 Traspone(C) − B)

$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x<0\\ x^2-x-a & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

a) **(1.3 puntos)** Obtenga el valor de a para que la función sea continua en $x=0$. Para ese valor de a, ¿sería derivable en $x=0$?

b) **(1.2 puntos)** Para $a=2$, estudie su monotonía y extremos relativos.

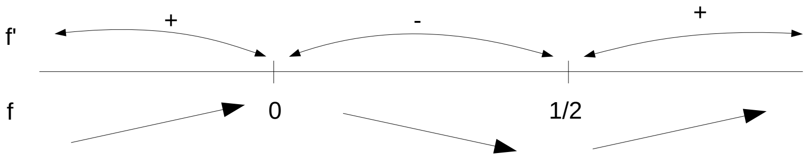
B.2.a) Continuidad:

$f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=-a$. Para que la función sea continua en *x = 0* debe ser *a = – 1*

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$

Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{(1-2x)^2}, & si \quad x<0\\ 2x-1, & si \quad x>0\end{cases}$; $\begin{matrix} f'(0^-)=4\\ f'(0^+)=-1\end{matrix}$. No sería derivable en *x = 0*

B.2.b) Igualamos la derivada a *0* y obtenemos $x=\frac{1}{2}$



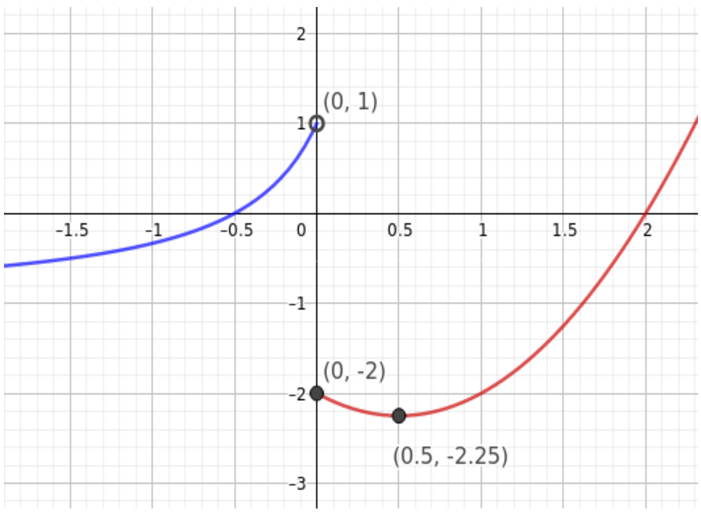
La función es creciente en (–∞ , 0) y en (½ , 0). Es decreciente en (0 , ½)

Es claro que en *x = ½* tenemos un mínimo relativo: $(\frac{1}{2},-\frac{9}{4})$

En x = 0 la función no es continua: $\begin{matrix} f(0^-)=1 \rightarrow & punto\ abierto\\ f(0^+)=-a=-2 \rightarrow & punto\ cerrado\end{matrix}$.

El punto *(0 , 1)* sería máximo, pero no lo es puesto que es abierto, ese punto no existe.

El punto *(0 , -2)* sí es cerrado, pero no es máximo porque hay puntos a su izquierda que están más arriba.



EJERCICIO 3

Una caja contiene 3 bolas negras, 2 blancas y 1 roja. Se realiza el siguiente experimento aleatorio: "Extraer de esa caja dos bolas al azar, una a continuación de otra sin reposición y anotar el color de las bolas en el orden en que han sido extraídas".

a) **(1 punto)** Describa el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio.

b) **(1.5 puntos)** Indique la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral.

B.3.a) E = {(NN) , (NB) , (NR) , (BN) , (BB) , (BR) , (RN) , (RB)}

B.3.b) $p(NN)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$; $p(NB)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$; $p(NR)=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

$p(BN)=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$; $p(BB)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$; $p(BR)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

$p(RN)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$; $p(RB)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de estudiantes que asiste de forma regular al cine. Para ello, se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 300 y se obtiene que de ellos, 210 acuden con regularidad al cine.

a) **(1.75 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 92% para estimar la proporción de estudiantes que va al cine regularmente. ¿Qué error máximo se cometería si se diera como estimación de dicha proporción 0.7?

b) **(0.75 puntos)** Con el mismo nivel de confianza, siendo la proporción muestral la misma, si queremos que el error sea menor que 0.02, ¿cuántos alumnos como mínimo hay que elegir en la muestra?

B.4.a)

$$P[Z\le z_{\alpha/2}]=\frac{1+p}{2}=\frac{1+0{,}92}{2}=0{,}96 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2}=1{,}75 \quad ; \quad \overline{p}=\frac{210}{300}=0{,}70$$

Intervalo de confianza para la proporción: $\left(\overline{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\ ,\overline{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right)=(0{,}65\,;\,0{,}75)$

El error máximo sería de *0,75 – 0,7 = 0,05*

B.4.b) Si se quiere disminuir el error el tamaño de la muestra debe ser mayor:

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \quad ; \quad n=\left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot\overline{p}(1-\overline{p})=1609{,}07.$$

La muestra debe ser de al menos 1610 estudiantes