SOLUCIONES
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía
Examen Septiembre. Año 2018

Matemáticas aplicadas a las CCSS II

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

EJERCICIO 1

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

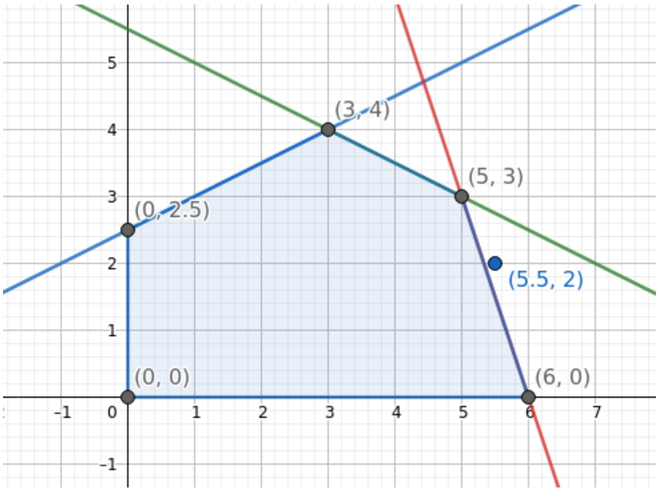
$$x+2y\le 11 \qquad x\ge 2y-5 \qquad 3x+y\le 18 \qquad x\ge 0 \qquad y\ge 0$$

a) **(1.8 puntos)** Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

c) **(0.2 puntos)** Justifique si el punto $(5.5,2)$ pertenece a la región factible.

A.1.a)



A.1.b) $F(x,y) = 2x+3y$

$c = F(0,0)$

$\longrightarrow 0$

$d = F(0,2.5)$

$\longrightarrow 7.5$

$i = F(3,4)$

$\longrightarrow 18$

$j = F(5,3)$

$\longrightarrow 19$

$k = F(6,0)$

$\longrightarrow 12$

El máximo se alcanza en $x = 5$, $y = 3$ y vale *19*. El mínimo en $x = 0$, $y = 0$ y vale *0*

A.1.c) "Parece" que está fuera, que inclumple la 3ª restricción: $3\cdot 5{,}5+2\le 18 \rightarrow$ *Falso*

Efectivamente, está fuera.

EJERCICIO 2

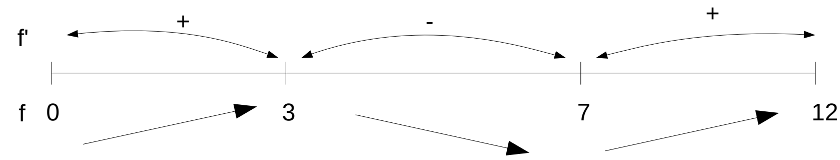
El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función $c(t)=t^3-15t^2+63t+10$, para $0\le t\le 12$, donde t representa el tiempo.

a) **(0.8 puntos)** ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuántas toneladas se consumen en ese momento?

b) **(0.7 puntos)** ¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?

c) **(1 punto)** Represente gráficamente la función.

A.2.a) Estudiamos la monotonía: $c'(t)=3t^2-30t+63$; $c'=0$; $t=3, t=7$



Máximos relativos:

t = 3 , c(3) = 91

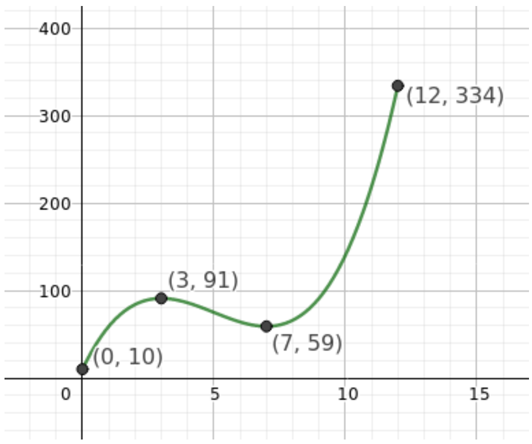
t = 12 , c(12) = 334

El máximo consumo se alcanza en cuando *t = 12*, siendo este de 334 000 toneladas.

A.2.b) El consumo decrece en el intervalo de tiempo *(3 , 7)*

A.2.c) Calculamos dos puntos más:

t = 0 , c(0) = 10 ; t = 7 , c(7) = 59



EJERCICIO 3

En una localidad, el 25% de los habitantes asiste periódicamente a la consulta del dentista, el 10% se hace una analítica y el 8% hace ambas cosas.

a) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos "Asistir a la consulta del dentista" y "Hacerse una analítica" son independientes.

b) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de habitantes ni se hace una analítica ni va al dentista?

c) **(1 punto)** Si elegimos un habitante al azar de esa localidad de entre los que no van al dentista, ¿cuál es la probabilidad de que se haga una analítica?

	D	D'	
A	8	2	10
A'	17	73	90
	25	75	100

A.3.a) $p(D)\cdot p(A)=0{,}25\cdot 0{,}10=0{,}025$

$p(D\cap A)=0{,}08$. Son dependientes

A.3.b) $p(D'\cap A')=0{,}73 \rightarrow 73\,\%$

A.3.c) $p(A/D')=\dfrac{2}{75}=0{,}03$

EJERCICIO 4

En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción del alumnado que lleva teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.

a) **(1.2 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 97% para la proporción de este alumnado que lleva el móvil al instituto. ¿Entre qué dos porcentajes varía esa proporción a ese nivel de confianza?

b) **(0.5 puntos)** Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿qué efecto tendrá esta disminución en el error de estimación?

c) **(0.8 puntos)** Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿cuántos alumnos de cada centro se deben tomar para constituir la muestra?

A.4.a)

$$P[Z \le z_{\alpha/2}] = \frac{1+p}{2} = \frac{1+0{,}94}{2} = 0{,}97 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1{,}88 \quad ; \quad \overline{p} = \frac{74}{121} = 0{,}61$$

Int. de confianza para la proporción: $\left(\overline{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\,,\ \overline{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right) = (0{,}5154\,;\ 0{,}7077)$

La proporción de estudiantes que lleva móvil al instituto está entre el *51,5%* y el *70,8%*

A.4.b) Al disminuir el nivel de confianza, el intervalo disminuye en amplitud, el error disminuye.

A.4.c)

	Centro 1	Centro 2	Centro 3
6x	x	2x	3x
121	n1	n2	n3

$$\frac{6x}{121} = \frac{x}{n1} \quad \rightarrow \quad n1 = \frac{121 \cdot x}{6x} = 20{,}17$$

$$\frac{6x}{121} = \frac{2x}{n2} \quad \rightarrow \quad n2 = \frac{121 \cdot 2x}{6x} = 40{,}33$$

$$\frac{6x}{121} = \frac{2x}{n3} \quad \rightarrow \quad n3 = \frac{121 \cdot 3x}{6x} = 60{,}50$$

Se tomarían 20 alumnos del primero, 40 del segundo y 61 del tercero.

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule $A^{2018}+A^{2019}$

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A+B\cdot B^t=2A$

B.1.a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$; $A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A$; $A^4=(A^2)^2=I$

$A^{2018}=(A^2)^{1009}=I^{1009}=I$; $A^{2019}=(A^{2018})\cdot A=I\cdot A=A$

$A^{2018}+A^{2019}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

B.1.b) $X=(2A-B\cdot B^t)\cdot A^{-1}$

m2 = Inversa(A) $\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ m3 = B Traspone(B) $\rightarrow \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ m4 = 2 A − m3 $\rightarrow \begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & -7\end{pmatrix}$ X = m4 m2 $\rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 2\\ -7 & 7\end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara a lo largo de 50 años viene dado por la expresión $B(t)=\begin{cases}-0.04t^2+2.4t & 0\le t<40\\ \dfrac{40t-320}{t} & 40\le t\le 50\end{cases}$

donde t es el tiempo transcurrido.

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función $B(t)$ en el intervalo $[0,50]$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía de la función $B(t)$ y determine en qué momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

c) **(0.5 puntos)** Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

B.1.a) El primer trozo es una polinómica, continua y derivable en su dominio: [0 , 40)

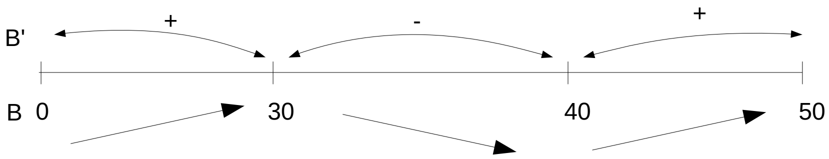
El segundo trozo es una racional, continua y derivable en su dominio: (40 , 50]

Hay que estudiar *t = 40*

Continuidad: $\begin{matrix}B(40)=\lim\limits_{t\to 40^+}B(t)=32\\ \lim\limits_{t\to 40^-}B(t)=32\end{matrix}$. La función es continua en su dominio: [0 , 50]

Derivabilidad: $B'(t)=\begin{cases}-0{,}08t+2{,}4 & , \quad si\ \ 0\le t<40\\ \dfrac{320}{t^2} & , \quad si\ \ 40<t\le 50\end{cases}$; $\begin{matrix}B'(40^-)=-0{,}8\\ B'(40^+)=0{,}2\end{matrix}$. No es derivable en *t = 40*

B.2.b) Igualamos la derivada a 0 y se obtiene: $B'(t)=0 \rightarrow \begin{cases} t=30, & si \quad 0 \leq t < 40 \\ \nexists \quad , & si \quad 40 < t \leq 50 \end{cases}$

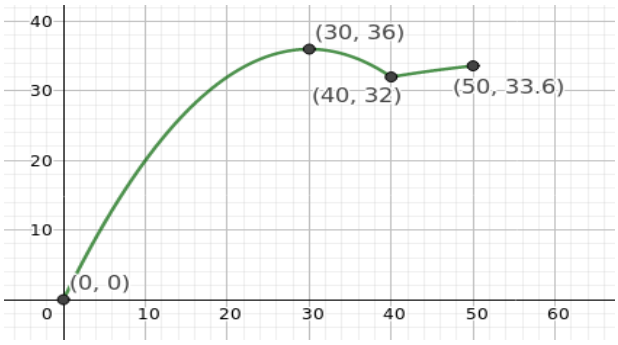


La función es creciente en los intervalos [0 , 30) y (40 , 50]. Decreciente en (30 , 40)

Los máximos relativos son t = 30 , B(30) = 36 ; t = 50 , B(50) = 33,6

El máximo beneficio se obtuvo a los 30 años. Fue de 36 000 €.

B.2.c) Calculamos un punto más: t = 0 , B(0) = 0.



El beneficio empezó siendo de 0 € y empezó a crecer rápidamente los primeros 20 años. A partir de ahí, siguió creciendo más lentamente hasta el año 30. Entonces se consiguió el máximo beneficio, de 36 000 €. Decreció los siguientes 10 años hasta los 32 000 €. Volvieron a crecer lentamente hasta el año 50, en que fueron de 33 600 €.

EJERCICIO 3

Un hotel dispone de tres lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavados defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado del hotel.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.

	L1	L2	L3	
D	2,5	4,5	4	11
D'	47,5	25,5	16	89
	50	30	20	100

5% de 50 = 2,5

15% de 30 = 4,5

20% de 20 = 4

B.3.a) $p(D')=\dfrac{89}{100}=0{,}89$

B.3.b) $p(L1/D)=\dfrac{2{,}5}{11}=0{,}23$

EJERCICIO 4

La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa, obteniéndose las siguientes edades

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza para estimar la edad media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y un nivel de confianza del 99%.

B.4.a) Calculamos la media de la muestra: $\bar{x}=\dfrac{30+42+38+...}{16}=39$

Calculamos $z_{\alpha/2}$ → $p(z\le z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}97}{2}$; $z_{\alpha/2}=2{,}17$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(34{,}66\ ;\ 43{,}34)$

B.4.b) $z_{\alpha/2}$ → $p(z\le z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}99}{2}$; $z_{\alpha/2}=2{,}575$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2=106{,}16$; La muestra debe ser de al menos 107 empleados