SOLUCIONES
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía
Examen Reserva A. Año 2018

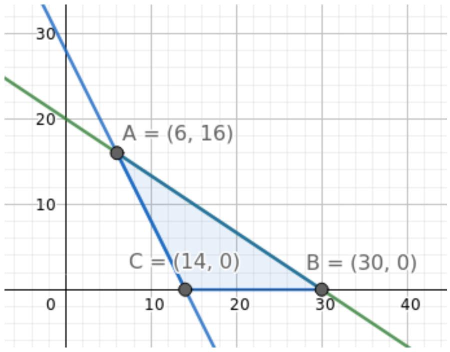
Matemáticas aplicadas a las CCSS II

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) La capacidad máxima de trabajo de un taller que se dedica a la confección de pañuelos y corbatas es de 60 horas semanales. Cada pañuelo que confecciona le supone 2 horas de trabajo y le reporta un beneficio de 4 euros. En el caso de las corbatas son 3 horas y 6 euros respectivamente por unidad. Contrae el compromiso de que el número de corbatas confeccionadas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28.
Con estas condiciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de prenda debe confeccionar para obtener un beneficio económico máximo?

A.1.a) x: pañuelos ; y: corbatas
horas: $2x+3y\leq 60$
compromiso: $y+2x\geq 28$
$x\geq 0 \quad ; \quad y\geq 0$
Beneficio: $B(x,y)=4x+6y$



B(6,16) = 120
B(30 , 0) = 120
B(14 , 0) = 56

El beneficio máximo es de 120€. Se alcanza en cualquier punto del segmento entre A y B. Pero como son pañuelos y corbatas, deben ser valores enteros. Estos serían:

x	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
y	16	15,33	14,67	14	13,33	12,67	12	11,33	10,67	10	9,333	8,667	8	7,333	6,667	6	5,333	4,667	4	3,333	2,667	2	1,333	0,667	0

EJERCICIO 2

a) **(1 punto)** Calcule la derivada de las funciones

$$f(x)=x\cdot ln(x) \qquad\qquad g(x)=\frac{e^{3x}}{x^4+1}$$

b) **(1.5 puntos)** Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=x^2+6x+5$, en el punto de abscisa $x=-2$. Represente gráficamente la función h y la recta tangente hallada.

A.2.a) $f'(x)=1\cdot\ln(x)+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln(x)+1$

$$g'(x)=\frac{3e^{3x}(x^4+1)-e^{3x}(4x^3)}{(x^4+1)^2}=\frac{e^{3x}(3x^4-4x^3+3)}{(x^4+1)^2}$$

A.2.b) $t:\quad y=h'(x_0)(x-x_0)+h(x_0)$

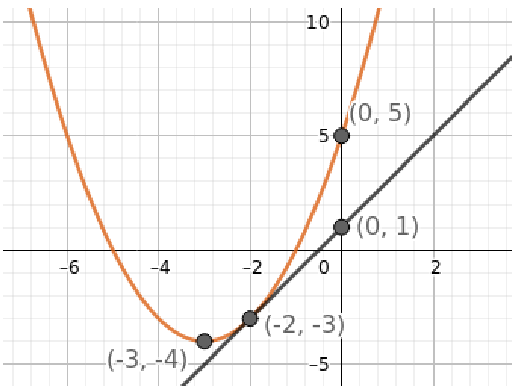
$h'(x)=2x+6$

$h'(-2)=2 \quad ; \quad h(-2)=-3$

$t:\quad y=2(x+2)-3 \quad ; \quad y=2x+1$

Para representar la recta calculamos otro punto: *(0 , 1)*

Para representar la parábola, el vértice: *(–3 , –4)* y otro punto *(0 , 5)*



EJERCICIO 3

En un centro de enseñanza secundaria el 48% de los estudiantes son chicos. El 85% de los chicos del centro y el 82% de las chicas supera todas las asignaturas. Se elige al azar un estudiante del centro.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que supere todas las asignaturas?

b) **(1 punto)** Si ha superado todas las asignaturas, ¿cuál es la probabilidad de que sea una chica?

	S	S'	
H	40,8	7,2	48
M	42,64	9,36	52
	83,44	16,56	100

85% de 48 = 40,8 ; 82% de 52 = 42,64

A.3.a) $p(S)=0{,}8344$

A.3.b) $p(M/S)=\dfrac{42{,}64}{83{,}44}=0{,}5010$

EJERCICIO 4

El peso de las ciruelas de una determinada variedad sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 3 gramos. Se eligen al azar 25 ciruelas de esa variedad y se pesan, resultando un peso medio de 60 gramos.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo al 95% de confianza para estimar el peso medio de las ciruelas de esa variedad.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar, para que al estimar el peso medio de esa variedad de ciruelas con un nivel de confianza del 99%, el error cometido sea inferior a 1 gramo.

A.4.a) $p(z\le z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}95}{2}$; $z_{\alpha/2}=1{,}96$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(58{,}8240\ ;\ 61{,}1760)$

A.4.b) $p(z\le z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}99}{2}$; $z_{\alpha/2}=2{,}576$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2=59{,}71$; La muestra debe ser de al menos 60 ciruelas

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) **(0.5 puntos)** Razone qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) **(2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^2$

B.1.a) $A_{2\times2} \cdot P_{m\times n} \cdot B^t_{3\times2}$. Para que pueda hacerse *A·P* debe ser *m = 2*. Se obtiene una *M: 2 x n*.

$M_{2\times n} \cdot B^t_{3\times2}$. Para que pueda hacerse M·*B^t* debe ser n = *3*. Se obtiene una *2 x 2*.

O sea, la matriz *P* debe ser *2 x 3*

$Q_{m\times n} \cdot A_{2\times2} \cdot C_{2\times3}$. Para que pueda hacerse *Q·A* debe ser n = *2*. Se obtiene una *M: m x 2*.

$M_{m\times2} \cdot C_{2\times3}$. Para que el resultado sea una matriz cuadrada, debe ser *m = 3* .

O sea, la matriz *Q* debe ser *3 x 2*

B.1.b) $X = A^{-1}(A^2 + 2B \cdot C^t)$

$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$

2 B Traspone(C) $\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 22 & 8 \end{pmatrix}$

A^2 + 2 B Traspone(C) $\rightarrow \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}$

Inversa(A) $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Inversa(A) (A^2 + 2 B Traspone(C)) $\rightarrow \begin{pmatrix} -31 & -26 \\ -20 & -15 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x) = \dfrac{ax}{bx+1}$, con a y b números reales.

a) **(1.5 puntos)** Calcule los valores de a y b, sabiendo que $f(-1) = 1$ y que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $y = 2x + 1$.

b) **(1 punto)** Para $a = b = 1$, halle la ecuación de sus asíntotas.

B.2.a) $f(-1)=1 \rightarrow \dfrac{-a}{-b+1}=1 \rightarrow a=b-1$

La recta tangente es paralela a la recta: $Pendiente=2 \rightarrow f'(0)=2$

$$f'(x)=\frac{a(bx+1)-axb}{(bx+1)^2} \rightarrow f'(0)=a=2 \rightarrow b=3$$

B.2.b) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$. Tiene una asíntota horizontal en *y = 1*

$\lim_{x\to-1} f(x)=\pm\infty$. Tiene una asíntota vertical en x = *–1*

EJERCICIO 3

Sean A, B, C, D, E y F sucesos de un experimento aleatorio.

a) **(0.5 puntos)** Se sabe que $P(A)=0.5$, $P(A\cup B)=0.7$ y $P(A\cap B)=0.4$. Halle la probabilidad de que ocurra B.

b) **(1 punto)** Se sabe que $P(C)=0.4$, $P(D)=0.3$ *y* $P(C\cup D)=0.5$. Halle la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

c) **(1 punto)** Se sabe que los sucesos E y F son independientes, que $P(E)=0.6$ y que $P(F)=0.8$. Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

B.3.a) $p(B)=p(A\cup B)-p(A)+p(A\cap B)=0{,}7-0{,}5+0{,}4=0{,}6$

B.3.b) $p(C/\bar{D})=\dfrac{p(C)-p(C\cap D)}{p(\bar{D})}=\dfrac{0{,}4-(0{,}4+0{,}3-0{,}5)}{0{,}7}=\dfrac{2}{7}$

B.3.c) Si E y F son independientes, sus contrarios también lo son

$$p(\bar{E}\cap\bar{F})=p(\bar{E})\cdot p(\bar{F})=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08$$

EJERCICIO 4

Se desea estimar el porcentaje de jóvenes que utilizan una determinada red social. Para ello se escoge una muestra aleatoria simple de 500 jóvenes y de ellos 410 afirman utilizarla.

a) **(1.5 puntos)** Calcule el intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usa esa red social con un nivel de confianza del 95%.

b) **(1 punto)** Manteniendo la proporción muestral, determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con un nivel de confianza del 97%, el error máximo que se cometa al estimar la proporción de esa población sea inferior a 0.04.

B.4.a) $P[Z\leq z_{\alpha/2}]=\dfrac{1+p}{2}=\dfrac{1+0{,}95}{2}=0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96$; $\bar{p}=\dfrac{410}{500}=0{,}82$

Int. de conf. para la proporción: $\left(\bar{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\ ,\bar{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)=(0{,}7863\,;0{,}8537)$

B.4.b) $P[Z\leq z_{\alpha/2}]=\dfrac{1+p}{2}=\dfrac{1+0{,}97}{2}=0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}881$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$; $n=\left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot\bar{p}(1-\bar{p})=434{,}43$

La muestra debe ser de al menos 435 jovenes