Tema 5. Matrices

1. Definiciones

1.1. Matriz: es una tabla de números. Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

1.2. Fila: cualquier linea horizontal

1.3. Columna: cualquier linea vertical

A tiene 2 filas y 3 columnas ; B tiene 4 filas y 2 columnas

1.4. Dimensión: *filas* x *columnas*

A_{2x3} ; B_{4x2}

1.5. Elemento: es cada número de la matriz

$a_{12}=0 \quad ; \quad a_{23}=2 \quad ; \quad b_{31}=5$

1.6. Matriz cuadrada: tiene las mismas filas que columnas

$C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $C_{2x2} = C_2$. Dimensión 2x2 ; **Orden** 2

2.1. Diagonal de una matriz: la forman los elementos que tienen igual fila que columna. $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2. Matriz triangular: todos los elementos por debajo de la diagonal son *0*

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3. Matriz diagonal: todos sus elementos son **0**, excepto los de la diagonal, que pueden ser cualesquiera. Debe ser **cuadrada**

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3.1. Matriz traspuesta: es la que resulta al intercambiar las filas por las columnas

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \rightarrow A^t_{3\times 2}$$

3.2. Matriz simétrica: coincide con su traspuesta $A = A^t$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz sea simétrica, debe ser cuadrada

4.1. Matriz fila: sólo tiene una fila $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_{1\times 2}$

4.2. Matriz columna: sólo tiene una columna

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q_{3\times 1}$$

5.1. Matriz nula (Matriz cero) ***O***: todos sus elementos son 0

5.2. Matriz identidad (Matriz unidad, matriz uno) ***I***: todos sus elementos son **0**, excepto los de la diagonal, que son **1**. Debe ser **cuadrada**

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Operaciones

Suma (resta): se necesita que las dos matrices tengan la misma dimensión.

Se suman (restan) los elementos que están en la misma posición

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n} \quad ; \quad a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$

Matriz opuesta, –A: se cambian de signo todos los elementos.

$$A+(-A)=A-A=0$$

Producto por un escalar (por un número). Se multiplican todos los elementos de la matriz por el número

$$k\cdot A_{m\times n}=P_{m\times n} \quad ; \quad k\cdot a_{ij}=p_{ij}$$

Producto de matrices: se necesita que la dimensión en columnas de la primera coincida con la dimensión en filas de la segunda

$$A_{m\times \mathbf{n}}\cdot B_{\mathbf{n}\times p}=C_{m\times p}$$

Se multiplican todos los elementos de cada fila de A con todos los elementos de cada columna de B y se van sumando los resultados

División de matrices: Hay que multiplicar por la matriz inversa

$$A_{m\times n}\div B_{n\times n}=A\cdot B^{-1}{}_{m\times n}$$

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

► $A+B=\text{no se pueden sumar}$

► $A+C=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$

$$3A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & -1\end{pmatrix}$$

► $A_{2\times 3}\cdot B_{2\times 2}=\text{no se puede hacer}$

► $B_{2\times 2}\cdot A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 7\end{pmatrix}_{2\times 3}$

El producto no es conmutativo.

$A\cdot B \neq B\cdot A$

► $A_{2\times 3}\cdot C_{2\times 3}=\text{no se puede hacer}$

► $A_{2\times 3}\cdot {C^t}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 2}$

3. Matriz inversa: A^{-1}

Al multiplicar una matriz con su inversa se obtiene la matriz unidad:

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} (= A^{-1} \cdot A) = I}$$

3.1. Determinante de una matriz: *(Debe ser cuadrada)*

- **Orden 2** : Se multiplican los elementos de las dos diagonales y se restan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad |A| = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad ; \quad |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- **Orden 3.**
  - Adjunto de un elemento: es el determinante de orden 2 que se obtiene al suprimir la fila y la columna del elemento, cambiando el signo si la posición del elemento es impar

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

; Adjunto de a_{11} : $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$

1+1 = 2 : posición par
No cambia el signo

Adjunto de a_{32} : $A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2)) = -2$

3+2 = 5 : posición impar
Cambia el signo

- <u>Determinante de orden 3</u> : se elige una línea, se multiplica cada elemento por su adjunto, y se suman los resultados

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Elegimos, por ejemplo, la primera fila, y hacemos los adjuntos:

Adjunto de a_{11} : $A_{11}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-3$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(1\cdot(-1)-2\cdot(-1))=-1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-6$$

$$|A|=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}=0\cdot(-3)+1(-1)-2\cdot(-6)=11$$

- **<u>Propiedades de los determinantes:</u>**
  - Si una línea entera es 0, el determinante es 0
  - Si dos filas o dos columnas son iguales o proporcionales, el determinante es 0

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\ ;\ |A|=0 \qquad ; \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 6 & -2\end{pmatrix}\ ;\ |B|=0$$

3.2. Para que una matriz tenga inversa:

- Debe ser cuadrada
- El determinante debe ser ≠ *0*

3.3. Cálculo de la matriz inversa:

1. Se calcula el determinante. Si es *0*, hemos terminado, no hay inversa
2. Se calculan los adjuntos de **todos** los elementos y se hace la matriz adjunta
3. Se hace la traspuesta de esta matriz
4. Se divide cada elemento por el valor del determinante

$$A \rightarrow |A| \rightarrow Adj(A) \rightarrow Adj(A)^t \rightarrow \frac{1}{|A|} Adj(A)^t \rightarrow A^{-1}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t}$$

Ejemplo:

- Orden 2: $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. $|B| = -4$

2. $B_{11} = -2 \quad , \quad B_{12} = -3$

   $B_{21} = -2 \quad , \quad B_{22} = -1$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $Adj(B)^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

4. $B^{-1} = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Ejemplo:

- Orden 3: $$C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

1. $|C|=?$

   Elegimos la 3ª fila: $C_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix}=4$

   $|C|=1\cdot 4=4$

2. $C_{11}=0 \;,\; C_{12}=2 \;,\; C_{13}=2$
   $C_{21}=0 \;,\; C_{22}=0 \;,\; C_{23}=2$
   $C_{31}=4 \;,\; C_{32}=2 \;,\; C_{33}=-4$

$$Adj(C)=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

3. $Adj(C)^t=\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}$

4. $C^{-1}=\frac{1}{4}Adj(C)^t=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$

4. Ecuaciones matriciales

Ejemplo 1:

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Encuentra una matriz X que cumpla: $3X + 2A = 5B$

Se aplican las propiedades “de siempre” para despejar: lo que está sumando pasa restando, etc. Así se obtiene:

$$X = \frac{1}{3}(5B - 2A) = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-13}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2: Encuentra una matriz X que cumpla: $XA + I = B$

Este caso es diferente porque A debe “pasar dividiendo”. Se hace así:

$$XA = B - I \quad ; \quad X = (B - I) \cdot A^{-1} \quad ; \quad \cancel{X = A^{-1} \cdot (B - I)}$$

En matrices no hay división, se **multiplica por la inversa**. Hay que mirar si es **por la derecha o por la izquierda**

El resultado es: $X = \begin{pmatrix} \frac{29}{3} & -6 \\ \frac{-19}{3} & 4 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3: Sistema de ecuaciones

Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Tenemos un sistema: $\left. \begin{array}{r} 2X - 3Y = P \\ X - Y = Q \end{array} \right\}$

Se resuelve por el método que se vea conveniente y se obtiene:

$$\begin{cases} X = -P + 3Q \\ Y = -P + 2Q \end{cases}$$

Ahora se hacen las operaciones con las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4: Cálculo de algunos elementos

Dada la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

Calcula a para que:

$$X^2 - X = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Calculamos: $X^2 - X = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix}$

Igualamos: $\begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

Resolvemos: $\left\langle \begin{array}{l} \boxed{a = 4} \\ \cancel{a = -3} \end{array} \right. \qquad \left\langle \begin{array}{l} \boxed{a = 4} \\ \cancel{a = -5} \end{array} \right.$

5. Aplicaciones prácticas de las matrices

Ejemplo:

10.- Una persona tiene que comprar 2 kg de manzanas, 1 kg de ciruelas y 1.5 kg de plátanos y otra necesita 0.5 kg de manzanas, 2.5 de ciruelas y 3 de plátanos. En la frutería A, los precios de las manzanas son 1.8 euros/kg, los de las ciruelas 2.1 y los de los plátanos 1.9 y en la frutería B son 1.7, 2.3 y 1.75 respectivamente.

Se escriben las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 2.5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 1.8 & 1.7 \\ 2.1 & 2.3 \\ 1.9 & 1.75 \end{pmatrix}$$

a) Determine $M \cdot N$ e indique qué representa cada uno de los elementos de la matriz producto.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 2.5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.8 & 1.7 \\ 2.1 & 2.3 \\ 1.9 & 1.75 \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} Una \\ Otra \end{array} & \begin{pmatrix} 8.55 & 8.325 \\ 11.85 & 11.85 \end{pmatrix} \end{array}$$

El producto representa el coste de la compra de cada persona en cada tienda.

b) ¿En qué frutería le conviene a cada persona hacer la compra?

A la primera persona le conviene más la tienda B y a la segunda le da igual.