SOLUCIONES

Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**

Examen Suplente Septiembre. Año 2017

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- Se considera la función f dada por $f(x) = \dfrac{-3x^2+2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [1,5 puntos] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

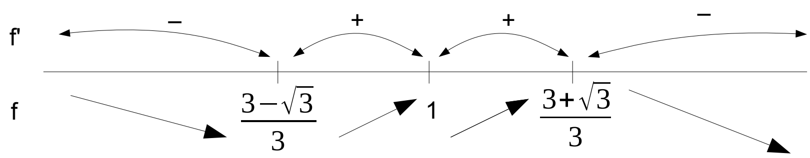
A.1.a) Verticales: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. Asíntota vertical *x = 1*

Horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$. No hay horizontales

Oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-3x^2+2}{x^2-x} = -3$; $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)+3x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-3x+2}{x-1} = -3$.

Asíntota oblicua *y = –3x - 3*

A.1.b) $f'(x) = \dfrac{-3x^2+6x-2}{(x-1)^2}$; $f' = 0 \rightarrow x = \dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$



Creciente en ($\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$, 1) y en (1 , $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$). Decreciente en (– ∞ , $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$) y en ($\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$, + ∞)

Mínimo relativo en $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$. Máximo relativo en $x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 2.- Sea f la función definida como $f(x) = (x+2)\ln(x)$ para $x > 0$, donde $\ln(x)$ representa al logaritmo neperiano de x.

a) [1,75 puntos] Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

b) [0,75 puntos] Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.

A.2.a)

$$\int (x+2)\ln x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \ ; \ du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = (x+2)dx \ ; \ v = \dfrac{x^2}{2} + 2x \end{array}\right] = \ln x\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$= \ln x\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) - \int \left(\frac{x}{2}+2\right)dx = \ln x\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) - \frac{x^2}{4} - 2x + K$$

A.2.b) $F(1) = 0$; $-\dfrac{1}{4} - 2 + K = 0$; $K = \dfrac{9}{4}$

Ejercicio 3.- Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) [0,75 puntos] Calcula BM.

b) [1 punto] Razona si el sistema dado por $AX = B$ tiene solución o no y, en caso afirmativo, cuántas soluciones tiene.

c) [0,75 puntos] Resuelve $AX = B$.

A.3.a) B · M

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

A.3.b) En la matriz A las filas son proporcionales, por lo que su rango es 1. En la matriz ampliada ocurre lo mismo. El rango es 1.

El sistema tiene infinitas soluciones, compatible indeterminado.

A.3.c) Tomamos solo la primera ecuación: $-x+y+z=1$, dando dos valores paramétricos: $(\lambda,\mu,1+\lambda-\mu)$

Ejercicio 4.- Considera las rectas dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

b) [0,75 puntos] Halla la distancia entre las rectas r y s.

A.4.a) Obtenemos un punto genérico de cada recta y el vector que los une:

$r:P(\lambda,\lambda+1,\lambda+1)$; $s:Q(1-t,t,2)$; $\overrightarrow{PQ}=(1-t-\lambda,-1+t-\lambda,1-\lambda)$

Obtenemos los vectores directores de las rectas: $r:\vec{v}=(1,1,1)$; $s:\vec{u}=(-1,1,0)$

Imponemos la perpendicularidad y resolvemos el sistema:

$\begin{cases} \vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \end{cases}$; $\begin{cases} -3\lambda+1=0 \\ 2t-2=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \lambda=\frac{1}{3} \\ t=1 \end{cases}$. Los puntos son: $P(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$, $Q(0,1,2)$

La recta pedida es: $\begin{cases} Q \\ \overrightarrow{PQ} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{-1}{3}k \\ y=1-\frac{1}{3}k \\ z=2+\frac{2}{3}k \end{cases}$

A.4.c) Solo tenemos que calcular el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$: $d(r,s)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Una cuerda de un metro de longitud se divide en dos trozos con los que se construyen un cuadrado y una circunferencia respectivamente.

Determina, si es posible, las longitudes de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

B.1) Medida del trozo para el cuadrado: x. Área del cuadrado: $\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$

Medida del trozo para la circunferencia: $1-x$. Área de la circunferencia:

Primero sacamos el radio a partir del perímetro: $1-x=2\pi r$; $r=\frac{1-x}{2\pi}$

Área de la circunferencia: $\pi r^2=\pi\frac{(1-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(1-x)^2}{4\pi}$

Suma de las áreas: $f(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(1-x)^2}{4\pi}$. Calculamos el mínimo: $f'(x)=\frac{x}{8}-\frac{(1-x)}{2\pi}$, $f''(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi}$

$f'(x)=0$; $2\pi x-8+8x=0$; $x=\frac{8}{2\pi+8}$; $f''(\frac{8}{2\pi+8})>0$ → Es un mínimo .

El trozo para el cuadrado debe medir $\frac{8}{2\pi+8}$ y el trozo para la circunferencia, $1-\frac{8}{2\pi+8}=\frac{2\pi}{2\pi+8}$

Ejercicio 2.-

a) [2 puntos] Halla $\int\frac{x^2}{(1+x^3)^{3/2}}\,dx$ (sugerencia $t=1+x^3$).

b) [0,5 puntos] Halla la primitiva cuya gráfica pasa por $(2,0)$.

B.2.a)
$$\left[\begin{array}{l} t=1+x^3 \;;\; x=\sqrt[3]{t-1} \\ x^2=\sqrt[3]{t-1}^2 \\ dt=3x^2dx=3\sqrt[3]{t-1}^2dx \;;\; dx=\frac{dt}{3\sqrt[3]{t-1}^2} \end{array}\right]$$

$$\int\frac{\sqrt[3]{t-1}^2}{\sqrt{t^3}}\cdot\frac{dt}{3\sqrt[3]{t-1}^2}=\frac{1}{3}\int t^{\frac{-3}{2}}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}}=\frac{-2}{3}\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{-2}{3}\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+K$$

B.2.b) $F(2)=0$; $-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{1+2^3}}+K=0$; $K=\frac{2}{9}$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+ky & = & 1 \\ 2x-y+kz & = & 1 \\ x-3y+2z & = & 1 \end{array}\right.$$

del que se sabe que para un cierto valor de k es compatible indeterminado.

a) [1,5 puntos] Determina el valor de k.

b) [1 punto] Resuelve el sistema para $k=1$.

B.3.a) Calculamos el rango de la matriz del sistema, *A*, y su ampliada:

$|A|=k^2+5k-6 \;\; ; \;\; |A|=0 \;\; ; \;\; k=-6, 1$

Para estos valores, r(A) = 2, puesto que el menor de *x* e *y* en la primera y segunda fila es distinto de 0

Ampliamos ese menor con los términos independientes y hacemos el determinante:

$|\bar{A}|=-k+1 \;\; ; \;\; |\bar{A}|=0 \;\; ; \;\; k=1$

Por tanto, para *k = 1* el sistema es compatible indeterminado. Para *k = –6* es incompatible

B.3.b) Damos valor paramétrico a *z* y nos quedamos con la primera y segunda ecuación:

$\begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-y=1-\lambda \end{cases}$; Soluciones: $\left(\dfrac{2-\lambda}{5}, \dfrac{-1+3\lambda}{5}, \lambda\right)$

Ejercicio 4.- Considera los puntos $A(1,3,-1)$ y $B(3,-1,-1)$.

a) [1,75 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual B es el simétrico de A.

b) [0,75 puntos] Siendo $C(5,1,5)$, calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

B.4.a) Calculamos el punto medio: $M(2,1,-1)$. El plano pasa por este punto

Calculamos el vector normal al plano: $\vec{AB}=(2,-4,0)$

Calculamos el plano: $2x-4y+0z+D=0 \;\; ; \;\; M: 2\cdot 2-4\cdot 1+0+D=0 \;\; ; \;\; D=0 \;\; ; \;\; 2x-4y=0$

B.4.b) $\acute{A}rea=\dfrac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}=(-24,-12,12)$$

$$\acute{A}rea=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\sqrt{6}=6\sqrt{6}\,u^2$$