Ejercicio 1.- Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+2a\cos(x) & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

es continua.

a) [1,5 puntos] Determina a y b.

b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f.

A.1.a) La función debe ser continua en los "puntos de unión":

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2a \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=2 \end{array}\right\} ; a = 1 \qquad \left.\begin{array}{l} f(\pi)=\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \pi^2+b \\ \lim_{x\to \pi^-} f(x)=\pi^2-2 \end{array}\right\} ; b = -2$$

A.1.b) Cada trozo es derivable ya que son polinómicas o *cos x* que lo son. Estudiamos los "puntos de unión":

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & , \quad si \quad x<0 \\ 2x-2\,sen\,x & , \quad si \quad 0<x<\pi \\ 2x & , \quad si \quad x>\pi \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} f'(0^-)=3 \\ f'(0^+)=0 \end{array} \; ; \; \begin{array}{l} f'(\pi^-)=2\pi \\ f'(\pi^+)=2\pi \end{array}$$. La función es derivable en *ℝ – {0}*.

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & , \quad si \quad x<0 \\ 2x-2\,sen\,x & , \quad si \quad 0<x<\pi \\ 2x & , \quad si \quad x\ge\pi \end{cases}$$

Ejercicio 2.- Considera la función dada por $f(x) = \sqrt{3+|x|}$ para $x \in [-3,3]$.

a) [0,5 puntos] Expresa la función f definida a trozos.

b) [2 puntos] Halla $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$

A.2.a) $$f(x)=\begin{cases} \sqrt{3+x} & , \quad si \quad 0\le x\le 3 \\ \sqrt{3-x} & , \quad si \quad -3\le x<0 \end{cases}$$

A.2.b) $$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=\int_{-3}^{0}\sqrt{3-x}\,dx+\int_{0}^{3}\sqrt{3+x}\,dx=\left[\frac{-2}{3}\sqrt{(3-x)^3}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3}\right]_{0}^{3}=\frac{4}{3}\sqrt{6^3}-\frac{4}{3}\sqrt{3^3}=8\sqrt{6}-4\sqrt{3}$$

Ejercicio 3.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcula la matriz inversa de $(A+B)$.

b) [1,25 puntos] Calcula el determinante de $2A^{-1}(A+B)^t$, siendo $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$.

A.3.a) A + B

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversa [A + B]

$$\to \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

A.3.b) Usando las propiedades de los determinantes está casi todo hecho:

$\left|2A^{-1}(A+B)^t\right| = 2^3 \frac{1}{|A|} \cdot |A+B|$. Solo necesitamos hacer el determinante de A, puesto que el de A+B ya está hecho:

Ejercicio 4.- Considera los vectores $\vec{u} = (2,3,4)$, $\vec{v} = (-1,-1,-1)$ y $\vec{w} = (-1,\lambda,-5)$ siendo λ un número real.

a) [1,25 puntos] Halla los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tiene volumen 6 unidades cúbicas.

b) [1,25 puntos] Determina el valor de λ para el que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

$|A| = 4 \quad ; \quad \left|2A^{-1}(A+B)^t\right| = 2^3 \frac{1}{|A|} \cdot |A+B| = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 24 = 48$

A.4.a) $V = \left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = \left|\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix}\right| = |-2\lambda-6| = 6 \quad ; \quad \begin{cases} -2\lambda-6=6 \\ -2\lambda-6=-6 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lambda=-6 \\ \lambda=0 \end{cases}$

A.4.b) El determinante de los tres vectores (producto mixto) debe ser 0:

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -2\lambda-6 = 0 \quad ; \quad \lambda = -3$

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$

B.1) Hacemos la resta de las fracciones puesto que tenemos una indeterminación (∞ – ∞) y aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x-x\cos x}{x\,sen\,x}=[\frac{0}{0}(L'Hopital)]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x-x\,sen\,x}{sen\,x+x\cos x}=[\frac{0}{0}(L'Hopital)]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\,sen\,x}=\frac{0}{2}=0$$

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\arctan(x)$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,\pi)$.

B.2) $$I=\int x\,arc\,tg\,x\,dx=\begin{bmatrix} arc\,tg\,x=u & ; & \dfrac{dx}{1+x^2}=du \\ x\,dx=dv & ; & \dfrac{x^2}{2}=v\end{bmatrix}=arc\,tg\,x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=arc\,tg\,x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}I_1$$

Ahora tenemos una racional:

$$I_1=\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx=x-arc\,tg\,x$$

La primitiva pedida es $F(x)=arc\,tg\,x\cdot\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}arc\,tg\,x+K$

$$F(0)=\pi \;\rightarrow\; K=\pi$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}\qquad \text{y}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que $ABX-2C=CX$.

B.3) $ABX-CX=2C\;;\;(AB-C)X=2C\;;\;X=(AB-C)^{-1}\cdot 2C$

A · B $\rightarrow \begin{pmatrix}7&-1&3\\8&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}$

Inversa [A · B – C] $\rightarrow \begin{pmatrix}0&0&1\\-2&3&-15\\-1&2&-12\end{pmatrix}$

Inversa [A · B – C] · 2 · C $\rightarrow \begin{pmatrix}2&-2&2\\-40&38&-24\\-30&30&-20\end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Sea r la recta que pasa por $A(4,3,6)$ y $B(-2,0,0)$ y sea s la recta dada por $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1-2\lambda \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de r y s.

b) [1,25 puntos] Calcula, si existen, los puntos C de s tales que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son ortogonales.

B.4.A) $r:\begin{cases} A(4,3,6) \\ \overrightarrow{AB}=(-6,-3,-6) \end{cases}$; $s:\begin{cases} P(2,0,1) \\ \vec{v}=(1,1,-2) \end{cases}$. Estudiamos el rango de los vectores:

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} \end{cases}:\begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $rang(\overrightarrow{AB},\vec{v})=2$. Las rectas son no paralelas.

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AP} \end{cases}:\begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. El determinante de esta matriz es distinto de 0. Las rectas se cruzan.

B.4.b) Tomamos un punto genérico de *s*: $C(2+\lambda,\lambda,1-2\lambda)$

$\overrightarrow{CA}=(2-\lambda,3-\lambda,5+2\lambda)$; $\overrightarrow{CB}=(-4-\lambda,-\lambda,-1+2\lambda)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \rightarrow 6\lambda^2+7\lambda-13=0$; $\lambda=\frac{-13}{6},1$.

Tenemos dos soluciones: $C_1(\frac{-1}{6},-\frac{13}{6},\frac{32}{6})$, $C_2(3,1,-1)$