SOLUCIONES

Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**

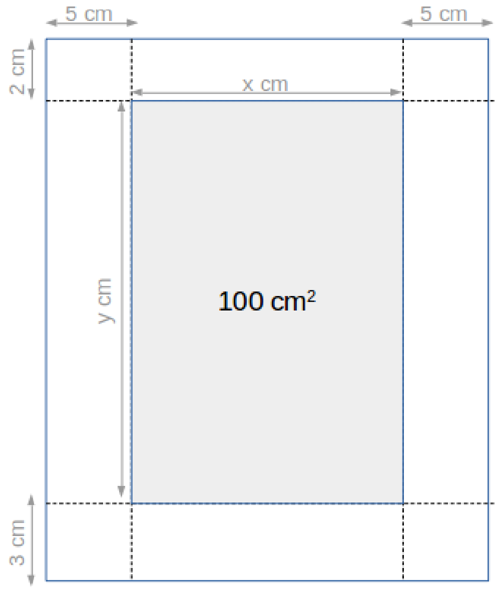
Examen Septiembre. Año 2017

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

A.1.a)



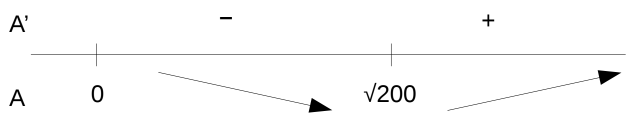
Dato: $x \cdot y = 100 \;\; ; \;\; y = \dfrac{100}{x}$

Función: Área de papel empleado.

$$A = (x+10)(y+5) = (x+10)\left(\frac{100}{x}+5\right) = 100 + 5x + \frac{1000}{x} + 50$$

Buscamos el mínimo:

$$A' = 5 - \frac{1000}{x^2} \quad ; \quad A' = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{200} = \sqrt{200}$$



Comprobamos que efectivamente es un mínimo. La solución es $x+10$ de ancho e $y+5 = \dfrac{100}{x}+5$ de alto.

O sea, *24,14 cm × 12,07 cm*.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

A.2.a) Hacemos la integral para pasar a la primera derivada:

$$f'(x) = \int x \cdot e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x \;\; ; \;\; du = dx \\ dv = e^x\,dx \;\; ; \;\; v = e^x \end{bmatrix} = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + K_1$$

Como tiene un extremo en *x = 1* : $f'(1) = 0 \;\rightarrow\; e - e + K_1 = 0 \;\rightarrow\; K_1 = 0 \;\rightarrow\; f' = xe^x - e^x$

Hacemos la integral de *f'* para pasar a *f*:

$$f(x) = \int (x \cdot e^x - e^x)\,dx = (x \cdot e^x - e^x) - e^x + K_2$$

Como pasa por el origen: $f(0) = 0 \;\rightarrow\; -1 - 1 + K_2 = 0 \;\rightarrow\; K_2 = 2$

$$f(x) = xe^x - 2e^x + 2$$

Ejercicio 3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}.$$

a) [1,25 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

b) [1,25 puntos] Para $m = 2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

A.3.a) A es la matriz del sistema y añadiendo B se tiene la ampliada.

Estudiamos el rango de A: $|A| = -2m+4 \;\; ; \;\; -2m+4=0 \;\; ; \;\; m=2$

1. Si $m \neq 2$, $r(A)=3$.→ *Sistema Compatible Determinado*
2. Si $m=2$, $r(A)<3$.

Tomamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Si $m=2$, $r(A)=2$.

Ampliamos ese menor: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-1 \end{vmatrix} = 0$. Siempre es 0. Por tanto:

Si $m=2$, $r(A)=2$,$r(\bar{A})=2$.→ *Sistema Compatible Indeterminado*

A.3.b) Si *m = 2* , el sistema queda así: $\left.\begin{matrix} x+y=2-\lambda \\ 2x=5-3\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$. Como queremos que *z = 17* , podemos resolver por sustitución: *x = – 23 ; y = 8 ; z = 17*

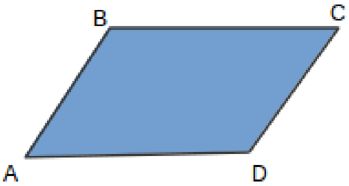
Ejercicio 4.- Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

a) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.

b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

c) [0,5 puntos] Calcula las coordenadas del vértice D.

A.4.a)



$$Área=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\|=|(0,-2,2)|=\sqrt{8}\ u^2$$

A.4.b) $$\pi:\begin{cases} A \\ \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} \end{cases} \quad ; \quad \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2y+2z=0$$

A.4.c) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$; $(-1,1,1)=(d_1-1,d_2-1,d_3-1)$; $D(0,2,2)$

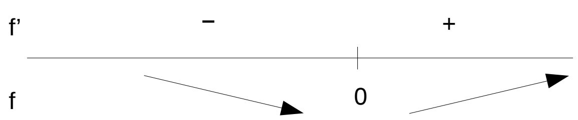
Ejercicio 1.- Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

a) [2 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [0,5 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

B.1.a) $Dom f=\mathbb{R}$. $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; $f'=0$; $e^x=\dfrac{1}{e^x}$; $e^{2x}=1$; $2x=\ln 1=0$; $x=0$



Es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$

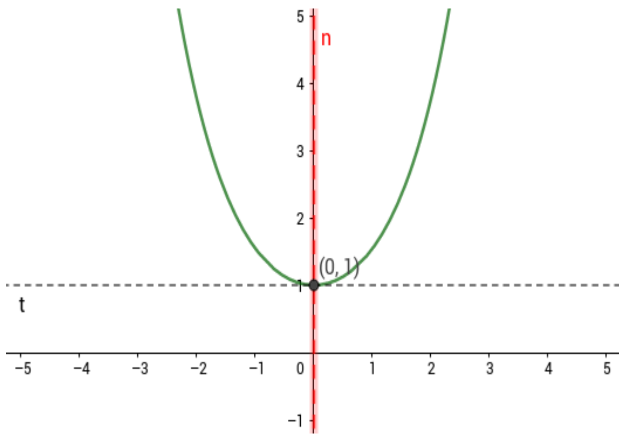
Tiene un mínimo (absoluto) en *(0 , 1)*

B.1.b) $$n:\quad y=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(0)=0 \quad ; \quad f(0)=1$$

No se puede hacer $\dfrac{-1}{f'(0)}$. Esto quiere decir que la recta no tiene pendiente, es vertical.

Como pasa por *(0 , 1)*, la recta es ***x = 0.***



Ejercicio 2.- Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $y = x$, la gráfica $y = \frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

a) [0,5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito.

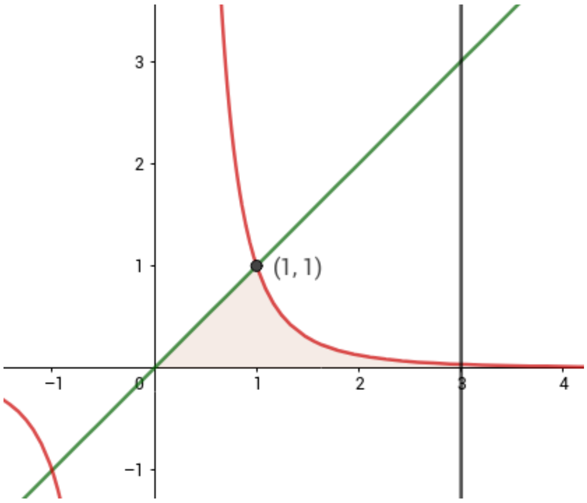
b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.

c) [0,5 puntos] Si consideras la gráfica $y = \frac{1}{x}$ en lugar de $y = \frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

B.2.a) La recta $y=x$ pasa por (0,0) y (1,1).

La curva $y=\frac{1}{x^3}$ tiene una asíntota vertical en y = 0 , una horizontal en x = 0 y pasa por (1,1).

La recta x = 3 es una vertical. Con esto podemos dibujar el recinto:



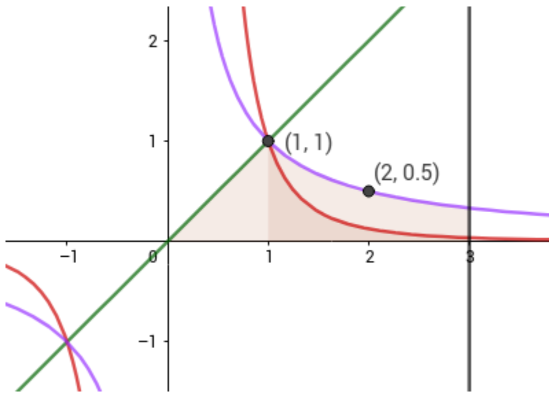
B.2.b) $$\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x^3}dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 x^{-3}dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+\frac{1}{2}=\frac{17}{18}\ u^2$$

B.3.c) La curva $y=\frac{1}{x^3}$ pasa por $(1,1)$ y por $\left(2,\frac{1}{8}\right)$

La curva $y=\frac{1}{x}$ tiene la misma forma, pero pasa por $(1,1)$ y por $\left(2,\frac{1}{2}\right)$, que está más arriba.

Por tanto el recinto es mayor, y el área es mayor



Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$.

a) [1,5 puntos] Discute el rango de A según los valores de k.

b) [1 punto] Para $k = 1$, calcula el determinante de $2\left(A^t A^{-1}\right)^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A.

B.3.a) Hacemos el determinante de A e igualamos a 0 : $|A|=2k^3+3k^2+k=0$

Sacamos *k* factor común y resolvemos la ecuación de 2º grado. Obtenemos $k=-1,-\frac{1}{2},0$

1. Si $k\neq-1,-\frac{1}{2},0$, r(A) = 3
2. Si $k=-1 \text{ o } -\frac{1}{2} \text{ o } 0$
   1. Si $k=-1$. Buscamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$. r(A) = 2
   2. Si $k=\frac{-1}{2}$. Buscamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}\neq 0$. r(A) = 2
   3. Si $k=0$. Buscamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$. r(A) = 2

B.3.b) Aplicamos las propiedades de los determinantes:

$|A|=|A^t|$ → $|A^t|=6$

$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ → $|A^{-1}|=\frac{1}{6}$

$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ → $det\left(A^t\cdot A^{-1}\right)=6\cdot\frac{1}{6}=1$

$\left|\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^{2017}\right|=1^{2017}=1$

$|k\cdot A|=k^3\cdot|A|$ → $\left|2\cdot\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^{2017}\right|=8\cdot 1=8$

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(0,1,1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x-2y &= -5 \\ z &= 2 \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

B.4.a) Obtenemos dos puntos de r:

$$z=2 \ , \ y=0 \ , \ x=-5 \ \rightarrow \ A(-5,0,2)$$
$$z=2 \ , \ y=1 \ , \ x=-3 \ \rightarrow \ B(-3,1,2)$$

Ya tenemos el plano: $\pi : \begin{cases} P(0,1,1) \\ \overrightarrow{AP}=(5,1,-1) \\ \overrightarrow{BP}=(3,0,-1) \end{cases} \ ; \ \begin{cases} x=5\lambda+3\mu \\ y=1+\lambda \\ z=1-\lambda-\mu \end{cases}$

B.4.b) Tomamos un punto genérico de r que será el punto medio entre P y su simétrico P'

$$r: \begin{cases} x=-5+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases} \quad ; \quad Q(-5+2\lambda,\lambda,2)$$

Hacemos que el vector $\overrightarrow{PQ}=(-5+2\lambda,\lambda-1,1)$ sea perpendicular al director de r, $\vec{u}=(2,1,0)$:

$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{u}$; $-10+4\lambda+\lambda-1=0$; $\lambda=\frac{11}{5}$. El punto medio es $Q(-1,2,2)$.

Ya podemos obtener P' :

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP'} \ ; \ (\frac{-3}{5},\frac{6}{5},1)=(p_1+\frac{3}{5},p_2-\frac{11}{5},p_3-2) \ ; \ P'(\frac{-6}{5},\frac{17}{5},3)$$