SOLUCIONES

Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**

Examen Reserva B. Año 2017

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto $(0, 2)$ y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es la recta $x + y = 3$.

A.1) Función polinómica: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Pasa por *(0 , 2)* : $f(0)=2$; $d=2$

Pasa por *x = 0* : $f'(0)=0$; $c=0$

Recta tangente en *x = 1* , *y = –x + 3* : Pendiente *m = –1* , pasa por *(1 , 2)*

$$f'(1)=-1 \;;\; 3a+2b=-1$$

$$f(1)=2 \;;\; a+b+d=2$$

Se resuelve el sistema y se obtiene: *a = –1* , *b = 1*

El polinomio es: $f(x)=-x^3+x^2+2$

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (sugerencia $t=\sqrt[3]{x}$).

A.2) $t=\sqrt[3]{x}$; $t^3=x$; $3t^2dt=dx$

$$D=\int_0^{\sqrt[3]{3}}\frac{3t^2}{1+t}dt=\begin{bmatrix}\text{sacamos el 3 y}\\ \text{hacemos la división}\end{bmatrix}=3\int_0^{\sqrt[3]{3}}\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=3\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right]_0^{\sqrt[3]{3}}=$$

$$=3\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{2}-\sqrt[3]{3}+\ln(1+\sqrt[3]{3})\right)$$

Ejercicio 3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX=B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & m & m\\ m & 1 & 3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ m\end{pmatrix}.$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

b) [1 punto] Para $m=2$, si es posible, resuelve el sistema dado.

A.3.a) Estudiamos el rango de A y su ampliada:

$|A|=-2m^2+2m+4$; $|A|=0$; $m=-1,2$

1. Si *m ≠ –1 , 2* : r(A) = 3. Sistema compatible determinado

2.1. Si *m = –1*. Encontramos menores de orden 2 cuyo determinante no es 0 : $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

Hacemos el estudio de la matriz ampliada en este caso: $\bar{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$

$|\bar{A}|=0$; r($\bar{A}$) = 2. Sistema compatible indeterminado

2.2. Si $m = 2$. Encontramos menores de orden 2 cuyo determinante no es 0 : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Hacemos el estudio de la matriz ampliada en este caso: $\bar{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$|\bar{A}|=0$; r($\bar{A}$) = 2. Sistema compatible indeterminado

A.3.b) Damos a *x* valor paramétrico y usamos las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ -y+z=1-\lambda \\ 2y+2z=1-\lambda \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{-1}{4}+\dfrac{1}{4}\lambda \\ z=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{4}\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Sea π el plano determinado por los puntos $A(1,0,0), B(0,1,0)$ y $C(0,0,\lambda)$, siendo λ un número real, y sea r la recta dada por $r \equiv \begin{cases} y-z & = & 3 \\ -x+2y & = & 3 \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

b) [1,25 puntos] Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ.

A.4.a) Sacamos dos puntos de *r* :

$y=0$, $z=-3$, $x=-3$, $P(-3,0,-3)$; $y=1$, $z=-2$, $x=-1$, $Q(-1,1,-2)$

Con *A* , *P* y *Q* obtenemos el plano: $\vec{AP}=(-4,0,-3)$; $\vec{AQ}=(-2,1,-2)$

$$\alpha: \begin{cases} x=1-4\lambda-2\mu \\ y=\mu \\ z=-3\lambda-2\mu \end{cases}$$

A.4.b) Sacamos la ecuación general del plano: $\vec{AB}=(-1,1,0)$; $\vec{AC}=(-1,0,\lambda)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda x+\lambda y+z-\lambda=0$$

Estudiamos el sistema formado por el plano y la recta:

$$\begin{cases} \lambda x+\lambda y+z=\lambda \\ y-z=3 \\ -x+2y=3 \end{cases} \quad ; \quad |A|=3\lambda+1 \ ; \ |A|=0 \ ; \ \lambda=\frac{-1}{3}$$

$$|\bar{A}|=-5\lambda$$

1. Si $\lambda\neq\dfrac{-1}{3}$, r(A) = 3 , sistema compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto.

2. Si $\lambda=\dfrac{-1}{3}$, r(A) = 2 , r($\bar{A}$) = 3 , sistema incompatible. La recta y el plano son paralelos disjuntos.

Ejercicio 1.- Considera la función definida por $f(x) = -x + \dfrac{4}{x^2}$ para $x \neq 0$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

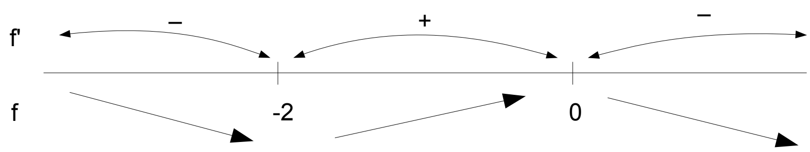
c) [0,5 puntos] Esboza la gráfica de f.

B.1.a) Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} f = -\infty + 0 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f = +\infty + 0 = +\infty$. No tiene asíntotas

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0} f = 0 + \infty = +\infty$. Asíntota vertical *x = 0* (derecha e izquierda)

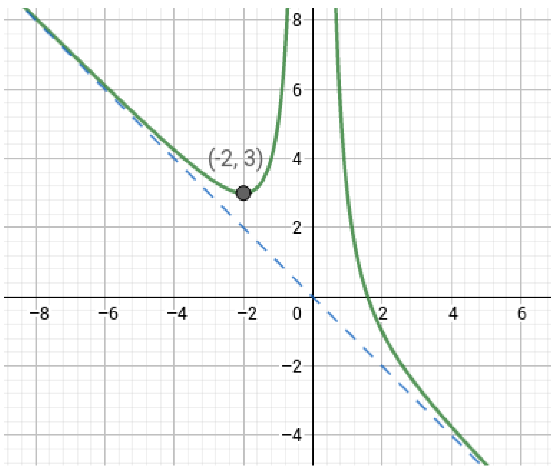
Asíntotas oblícuas: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(-1 + \dfrac{4}{x^3}\right) = -1$; $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) + x) = 0$. Asíntota oblícua *y = – x*

B.1.b) $f'(x) = -1 - \dfrac{8}{x^3}$; $f'(x) = 0$; $x = -2$



Creciente en *(–2 , 0)*. Decreciente en *(–∞ , –2)* y *(0 , +∞)*. Mínimo relativo en *x = –2 , y = 3.*

B.1.c)



Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx$

B.2.a) Es una integral racional. Desarrollamos el denominador y hacemos la división:

$\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}=1-\frac{2x}{x^2+2x+1}$. Descomponemos la fracción en fracciones simples:

$\frac{2x}{x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$; $2x=A(x+1)+B$. Se dan valores a x : $A=2$, $B=-2$

Hacemos la integral indefinida: $I=\int(1-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2})\,dx=x-2\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}+K$

Hacemos la integral definida: $D=\left[x-2\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}+K\right]_0^1=1-2\ln 2-1+2=2-2\ln 2$

Ejercicio 3.- Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & m-1\\ 0 & m-1 & 2-m\\ 0 & -1 & 2-m\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

a) [1 punto] Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.

b) [1,5 puntos] Para $m=1$, calcula, si existe, la matriz X que verifica la igualdad $A^{-1}XA+I=B$, siendo I la matriz identidad.

B.3.a) $|A|=-m^2+2m$; $|A|=0$, $m=0,2$. Para estos valores la matriz no tiene inversa.

B.3.b) $X=A(B-I)A^{-1}$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Inversa (A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

B – I

$$\rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

A (B – I)

$$\rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

A (B – I) Inversa (A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\vec{u}=(1,2,1)$ y el plano π de ecuación $y=0$.

a) [1,25 puntos] Halla la ecuación de la recta que pasa por P, está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a $\vec{u}$.

b) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P, es perpendicular a π y del que $\vec{u}$ es un vector director.

B.4.a) El vector director de la recta buscada también debe ser perpendicular al normal del plano para que la recta esté contenida en el plano. Por tanto hacemos el producto vectorial:

$$\pi: y=0 \quad ; \quad \vec{n}=(0,1,0);\vec{u}=(1,2,1) \quad ; \quad \vec{v}=\vec{n}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(1,0,-1)$$

La recta pedida es $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

B.4.b) Como el plano pedido debe ser perpendicular a π , su vector normal lo podemos usar como director.

$$\alpha:(P,\vec{n},\vec{u}):\begin{cases} x=-1+\mu \\ y=\lambda+2\mu \\ z=1+\mu \end{cases}$$