**Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)**


---

**Ejercicio 1.- [2,5 puntos]** Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapas inferior y superior, con capacidad de $20\pi$ m$^3$. El material para las tapas cuesta $10$ euros cada m$^2$ y el material para el resto del cilindro $8$ euros cada m$^2$. Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.

---

**A.1)** Datos: x, radio de las tapas ; y, altura del cilindro

$$Volumen: \pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot x^2\cdot y=20\pi$$

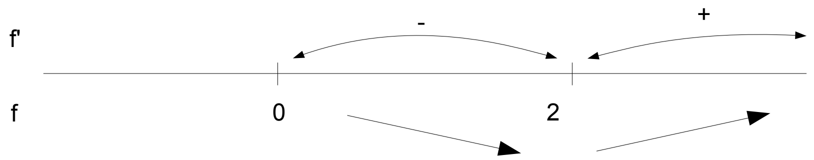
Despejamos y: $y=\dfrac{20}{x^2}$

Función a minimizar, precio: $f(x)=2\cdot 10\cdot \pi x^2+8\cdot 2\cdot \pi x\cdot y$ (2 tapas a 10€ y el lateral a 8€)

$$f(x)=20\pi x^2+\frac{320\pi}{x}$$

Hacemos la derivada: $f'(x)=40\pi x-\dfrac{320\pi}{x^2}$

Igualamos a 0 y resolvemos: $40\pi x-\dfrac{320\pi}{x^2}=0 \quad ; \quad x^3=8 \quad ; \quad x=\sqrt[3]{8}=2$




Efectivamente es un mínimo. El radio será 2 m. y la altura, $\dfrac{20}{2^2}=5\,m$

---

**Ejercicio 2.-** Sea $I=\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}\,dx.$

**a) [1,25 puntos]** Expresa $I$ aplicando el cambio de variable $t=2+\sqrt{x+1}$.

**b) [1,25 puntos]** Calcula el valor de $I$.

---

**A.2.a)**

$$I=\left[\begin{array}{c} t=2+\sqrt{x+1} \\ dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}} \\ dx=2(t-2)\,dt \end{array}\right]=\int_3^5 \frac{2(t-2)\,dt}{t}$$

**A.2.b)**

$$I=\int_3^5 \frac{2(t-2)\,dt}{t}=\int_3^5 \left(2-\frac{4}{t}\right)dt=[2t-4\ln t]_3^5=10-4\ln 5-6+4\ln 3=4+4\ln\frac{3}{5}$$

---

**Ejercicio 3.-** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

**a) [0,5 puntos]** Comprueba que $AA^t - 2A = I$ ($A^t$ denota la traspuesta de $A$ e $I$ la matriz identidad).

**b) [0,75 puntos]** Calcula $A^{-1}$.

**c) [1,25 puntos]** Determina, si existe, la matriz $X$ que verifica $XA + I = 3A$.

---

**A.3.a)** $AA^t - 2A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = I$

**A.3.b)** $M_1 = \text{Inversa}(A)$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

**A.3.c)** $X = (3A - I) \cdot A^{-1}$

$M_2 = 3A - I$ $\qquad$ $X = (3A - I)\ \text{Inversa}(A)$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(-1, -2, -1)$ y $B(1, 0, 1)$.

**a) [1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos $A$ y $B$ son simétricos.

**b) [1,25 puntos]** Calcula la distancia de $P(-1, 0, 1)$ a la recta que pasa por los puntos $A$ y $B$.

---

**4.A.a)** Buscamos el plano que pase por el punto medio y usamos el vector $\overrightarrow{AB}$

$M(0, -1, 0)$ ; $\overrightarrow{AB} = (2,2,2)$

$\pi: 2x + 2y + 2z + D = 0$ . Como pasa por $M$: $-2 + D = 0$ ; $D = 2$

$\pi: 2x + 2y + 2z + 2 = 0$

**4.A.b)** Usamos la fórmula para ello: $d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$ ; $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (0, 4, -4)$

$d(P, r) = \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$

**Ejercicio 1.- [2,5 puntos]** Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula $a, b, c$ y $d$ sabiendo que $f$ tiene un extremo relativo en $(0, 1)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1, -1)$.

**B.1)** Datos:

$f(0)=1 \quad ; \quad f(1)=-1 \quad ; \quad f'(0)=0 \quad ; \quad f''(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad ; \quad f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=6a+2b=0 \rightarrow b=-3a$

$f'(0)=c=0$

$f(0)=d=1$

$f(1)=a+b+c+d=a+b+1=a-3a+1=-1 \rightarrow a=1 \quad ; \quad b=-3$

**Ejercicio 2.-** Considera la región limitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = \sqrt{2x-2}$ para $x \geq 1$, la recta $y = x - 5$ y el eje de abscisas.

**a) [0,75 puntos]** Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte entre la gráfica de $f$ y las rectas.

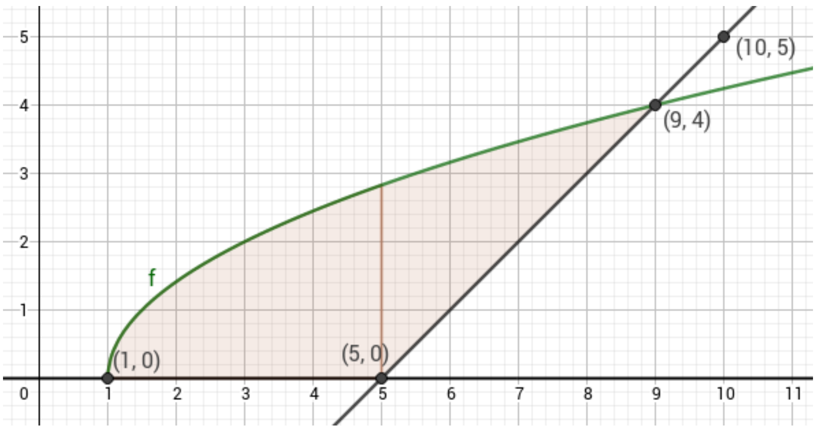
**b) [0,75 puntos]** Expresa mediante integrales el área del recinto anterior.

**c) [1 punto]** Calcula el área.

**B.2.a)** $Dom(f)=x\geq 1$ . Como es un radical, la gráfica es una media parábola "en horizontal". Damos dos valores para poder hacer el esbozo de la gráfica: $f(1)=0 \ ; \ f(3)=2$ .

En la recta tomamos los puntos $(5,0) \ y \ (10,5)$

La gráfica es:




Calculamos los puntos de corte:
$\sqrt{2x-2}=x-5 \rightarrow 2x-2=x^2-10x+25 \rightarrow x^2-12x+27=0 \rightarrow x=9 \quad x=3$ . La solución 3 no se usa

Calculamos $f(9)=4$

Los puntos de corte son $(1,0)$ $(5,0)$ $(9,4)$

**B.2.b)** $A=\int_1^5 \sqrt{2x-2}\,dx+\int_5^9 (\sqrt{2x-2}-x+5)\,dx$

**B.2.c)** Calculamos la integral indefinida:

$$I=\int \sqrt{2x-2}\,dx=\int \sqrt{t}\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{t^3}}{3}=\frac{\sqrt{(2x-2)^3}}{3}$$

$$A=\left[\frac{\sqrt{(2x-2)^3}}{3}\right]_1^5+\left[\frac{\sqrt{(2x-2)^3}}{3}-\frac{x^2}{2}+5x\right]_5^9=\frac{\sqrt{12^3}}{3}+\frac{64}{3}-\frac{81}{2}+45-\frac{\sqrt{12^3}}{3}+\frac{25}{2}-25=\frac{64}{3}-8=\frac{40}{3}u^2$$

---

**Ejercicio 3.-** Sea $A$ una matriz $3\times 3$ tal que $\det(2A)=8$.

**a) [0,5 puntos]** ¿Cuánto vale $\det(A)$?

**b) [0,75 puntos]** Siendo $B$ la matriz que se obtiene de $A$ multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale $\det(B)$?

**c) [1,25 puntos]** Determina los valores de $x$ para los que la siguiente matriz $A$ verifica que $\det(2A)=8$,

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**B.3.a)** $|2A|=2^3|A|=8$ → $|A|=1$

**B.3.b)** Al multiplicar una línea por un número, el determinante queda multiplicado por ese número:

$$|B|=3\cdot(-1)\cdot|A|=-3$$

**B.3.c)** Por el apartado a), se cumple $|A|=1$ . Hacemos el determinante y resolvemos la ecuación:

$$|A|=x^2-2x+1=1 \;\rightarrow\; x=0;\, x=2$$

---

**Ejercicio 4.-** Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,-2)$.

**a) [1 punto]** Calcula el volumen del tetraedro de vértices $A$, $B$, $C$ y $D$.

**b) [1,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta que pasa por $D$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $A$, $B$ y $C$.

---

**B.4.a)** $$V=\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{AC}\quad\overrightarrow{AD}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-1 & -3 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|15|=\frac{5}{2}$$

**B.4.b)** Hacemos el producto vectorial de los vectores para obtener uno perpendicular:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & -3 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(-2,-1,-5)=\vec{u}$$

La recta pedida es: $$r:\begin{cases} x=2-2\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z=-2-5\lambda\end{cases}$$