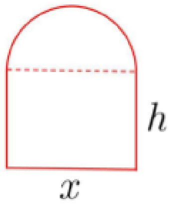
Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.

Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.



A.1.a) Tenemos como dato el área de 16 m².:

Es un rectángulo más un semicírculo: $16 = x\cdot h + \dfrac{\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$; $32 = 2xh + \pi\dfrac{x^2}{4}$; $128 = 8xh + \pi x^2$

$$h = \frac{128 - \pi x^2}{8x}$$

Ahora construimos la función que hay que optimizar, el perímetro:

$$f(x) = x + 2h + \pi\frac{x}{2} = x + \frac{128 - \pi x^2}{4x} + \frac{\pi}{2}x$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2\pi x\cdot 4x - (128 - \pi x^2)4}{16x^2} + \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{-2\pi x^2 - 128 + \pi x^2}{4x^2} + \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{-\pi x^2 - 128}{4x^2} + \frac{\pi}{2}$$

$$f' = 0 \;\rightarrow\; 4x^2 - \pi x^2 - 128 + 2\pi x^2 = 0 \;\; ; \;\; (4+\pi)x^2 = 128 \;\; ; \;\; x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}} \approx 4{,}23 \;.$$

Comprobamos que es un mínimo:

$f'(1) < 0$; $f'(10) > 0$. Efectivamente es un mínimo.

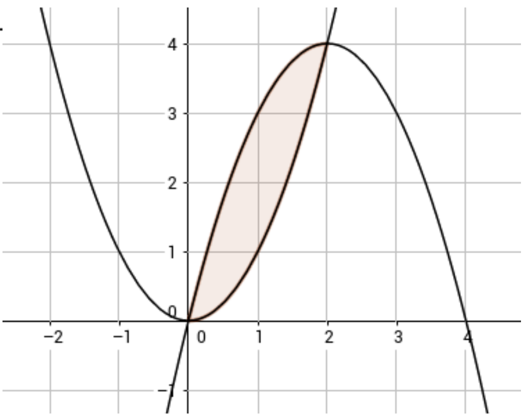
La base de la puerta debe ser de 4,23 metros.

Ejercicio 2.- Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.

c) [1 punto] Calcula el área.



A.2.a) Calculamos los vértices de ambas parábolas:

La primera lo tiene en el (0 ,0) . Es un parábola con las ramas hacia arriba.

La segunda en el (2 , 4). Es una parábola con las ramas hacia abajo.

Para los puntos de corte entre ellas resolvemos la ecuación:

$$x^2 = -x^2 + 4x \;\; ; \;\; x = 0 \;\; , \;\; x = 2$$

A.2.b) $A=\int_0^2 (-x^2+4x-x^2)dx=\int_0^2 (-2x^2+4x)dx$

A.2.c) $A=\left[-2\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{-16}{3}+8=\frac{8}{3}u^2$

Ejercicio 3.- Considera $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) **[1 punto]** Determina los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

b) **[1,5 puntos]** Resuelve $AX=-3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x=1$.

A.3.a) $A+\lambda\cdot I$

$\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$

Para que no tenga inversa el determinante debe ser 0.

Determinante $[A+\lambda\cdot I]$

$\rightarrow \lambda^3-3\lambda^2-4\lambda+12$

Resolvemos la ecuación por Ruffini y obtenemos:
Para estos valores no hay inversa.

Soluciones [Determinante $[A+\lambda I]=0$]

$\rightarrow \{-2, 2, 3\}$

A.3.b) $A\cdot X+3\cdot X=0$. Se hace esta operación con matrices y obtenemos el sistema:

$\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ -2x+4y=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$ Claramente, es compatible indeterminado porque la segunda ecuación es doble de la primera. Resolvemos dando a *y* valor paramétrico: $\left.\begin{array}{r} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right\}$

x = 1 , y = ½ , z = 0 es una solución.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= -2 \\ z &= t \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

A.4.a) Usaremos el punto P, un punto de la recta, y su vector director:

$$r:\begin{cases} A(1,-2,0) \\ \vec{u}=(3,0,1) \end{cases} \quad ; \quad \pi:\begin{cases} P(1,-1,0) \\ \vec{u}=(3,0,1) \\ \overrightarrow{AP}=(0,-1,0) \end{cases} \quad ; \quad \pi:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=-1-\mu \\ z=\lambda \end{cases}$$

A.4.b) Tomamos un punto genérico de r: $Q(1+3t,-2,t)$

Hacemos que el vector $\overline{PQ}$ sea perpendicular a *r*. $\overrightarrow{PQ}=(3t,-1,t)$; $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0$; $t=0$. $Q(1,-2,0)$

El punto *Q* obtenido es el punto medio entre *P* y su simétrico *P'* :

$$\frac{p_1+p_1'}{2}=q_1 \quad ; \quad p_1'=1 \quad ; \quad \frac{p_2+p_2'}{2}=q_2 \quad ; \quad p_2'=-3 \quad ; \quad \frac{p_3+p_3'}{2}=q_3 \quad ; \quad p_3'=0$$

El simétrico es $P'(1,-3,0)$

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ para $x\neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1,5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

B.1.a) $Dom f=\mathbb{R}-\{1\}$

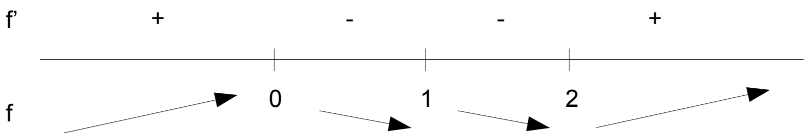
Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Esto es así porque la función del numerador es de mayor grado que la del denominador. Por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $m=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-x}=1$; $n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$

Se obtienen los mismos resultados haciendo los límites por $-\infty$. Por tanto la función tiene una asíntota oblicua: $\boldsymbol{y=x+1}$.

Asíntota vertical: podría haber en *x = 1*. $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$. La función tiene una asíntota vertical en **x = 1**.

B.1.b) Hacemos la derivada: $f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Igualamos a *0* y resolvemos: *x = 0 , x = 2.*



Es creciente en $(-\infty,0)$ y en $(2,+\infty)$. Es decreciente en $(0,1)$ y en $(1,2)$.

Tiene un máximo relativo en (0 , 0) y un mínimo relativo en (2 , 4).

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (sugerencia $t=\sqrt[4]{x}$).

B.2) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\begin{bmatrix} t=\sqrt[4]{x}\,; \quad t^4=x \\ 4t^3dt=dx\end{bmatrix}=\int\frac{4t^3dt}{t^2+t}$. Tenemos una integral racional. Hay que hacer la división y obtenemos:

$$I=4\int(t-1+\frac{t}{t^2+t})dt=\begin{bmatrix}\text{simplificando}\\ \text{la fracción}\end{bmatrix} = 4\int(t-1+\frac{1}{t+1})dt=2t^2-4t+4\ln|t+1|$$

Desahemos el cambio de variable:

$$I=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln|\sqrt[4]{x}+1|+K$$

Hacemos la integral definida:

$$D=2\cdot4-4\cdot2+4\ln3-2\cdot1+4\cdot1-4\ln2=2+4\ln3-4\ln2=2+4\ln\frac{3}{2}$$

Ejercicio 3.- Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

B.3.a) Planteamos el sistema de ecuaciones y lo discutimos. Precios: lápiz, x ; rotulador, y ; carpeta, z.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=15 \\ 2x+4y+z=20 \\ x+7y=25 \end{array}\right\} \quad ; \quad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0$$. rang(A) = 2

Matriz ampliada: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 2 & 4 & 20 \\ 1 & 7 & 25 \end{vmatrix} = 0$. rang($\overline{A}$) = 2. Como hay tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos. $z = t$.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 15-2t & 1 \\ 20-t & 4 \end{vmatrix}}{10}=4-\frac{7}{10}t \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 15-2t \\ 2 & 20-t \end{vmatrix}}{10}=3+\frac{1}{10}t$$

Tiene infinitas soluciones, aunque aquí serían válidas sólo las positivas. Por ejemplo, varias soluciones serían (dando valores a t): (3,3 ; 3,1 ; 1) , (2,6 ; 3,2 ; 2) , ...

B.3.b) En las soluciones anteriores usamos la nueva condición:

$$z=10x \quad ; \quad x=\frac{t}{10} \quad ; \quad \frac{t}{10}=4-\frac{7}{10}t \quad ; \quad t=5 \quad ; \quad r:\begin{cases} x=0{,}50\,€ \\ y=3{,}50\,€ \\ z=5\,€ \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Considera los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,2,1)$ y $\vec{w} = (m,1,n)$.

a) [1,25 puntos] Halla m y n sabiendo que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) [1,25 puntos] Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

B.4.a) Linealmente dependientes: rango < 3 ; determinante = 0

Ortogonal: producto escalar = 0

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 2n - 2m - 1 = 0$; $\vec{u} \cdot \vec{w} = m + n = 0$. Se hace el sistema y obtenemos:

$$n = \frac{1}{4} \quad , \quad m = \frac{-1}{4}$$

B.4.b) $\left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1-2m}{6} \right| = 10$; $\frac{1-2m}{6} = \pm 10$; $\begin{cases} m = \frac{-59}{2} \\ m = \frac{61}{2} \end{cases}$