SOLUCIONES
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía
Examen Suplente Septiembre. Año 2017

Matemáticas aplicadas a las CCSS II

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones

$$A\cdot D+B\cdot C \qquad D^t\cdot B-A^2$$

b) **(1.5 puntos)** Halle la matriz X que verifica la ecuación matricial $A\cdot X=B-C$.

A.1.a) $A_{2\times 2}\cdot D_{2\times 3}$. Puede hacerse. Se obtiene una 2×3

$B_{2\times 2}\cdot C_{2\times 2}$. Puede hacerse. Se obtiene una 2×2

La suma no puede hacerse, porque las dimensiones no son iguales : $2\times 3\neq 2\times 2$

$D^t_{3\times 2}\cdot B_{2\times 2}$. Puede hacerse. Se obtiene una 3×2

$A^2_{2\times 2}$. Puede hacerse. Se obtiene una 2×2

La resta no puede hacerse, porque las dimensiones no son iguales : $3\times 2\neq 2\times 2$

A.1.b) $X=A^{-1}(B-C)$

Inversa [A] $\rightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ B – C $\rightarrow \begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ Inversa [A] · (B – C) $\rightarrow \begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

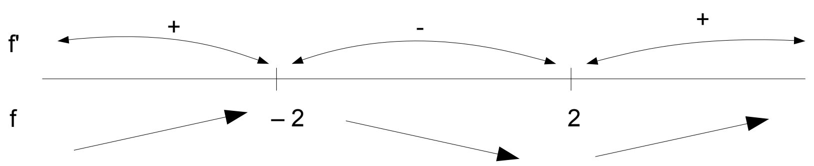
Sea la función $f(x)=x^3-12x+1$.

a) **(1.5 puntos)** Estudie su monotonía y determine sus extremos relativos.

b) **(1 punto)** Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

A.2.a) $Dom(f)=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-12$; $f'=0$; $x=\pm 2$



Creciente: (–∞ , –2) , (2 , +∞)

Decreciente: (–2 , 2)

Máximo relativo en (–2 , 17). Mínimo relativo en (2 , -15)

A.2.b) $t:\quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$f'(1)=-9 \quad ; \quad f(1)=-10$

$t:\quad y=-9(x-1)-10 \quad ; \quad y=-9x-1$

EJERCICIO 3

De los sucesos A y B se sabe que $P(A)=0.6$, $P(B/A)=0.8$ y $P(B/A^C)=0.1$.

a) **(1.8 puntos)** Calcule las probabilidades $P(B)$, $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$.

b) **(0.7 puntos)** ¿Son los sucesos A y B independientes?

A.3.a) $p(B/A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}$ → $p(B\cap A)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48$

$p(B/A')=\dfrac{p(B\cap A')}{p(A')}$ → $p(B\cap A')=0{,}1\cdot 0{,}4=0{,}04$

$p(B\cap A')=p(B)-p(B\cap A)$ → $p(B)=p(B\cap A')+p(B\cap A)=0{,}48+0{,}04=0{,}52$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}6+0{,}52-0{,}48=0{,}64$

A.3.b) $p(A\cap B)=0{,}48$; $p(A)\cdot p(B)=0{,}6\cdot 0{,}52=0{,}312$. No son independientes

EJERCICIO 4

Se desea estimar la proporción de bares y restaurantes que en el camino de Santiago ofertan el menú del peregrino con un precio máximo de 12 €. Para ello se eligen aleatoriamente 120 establecimientos que ofrecen este menú, de los que 80 tienen un precio máximo de 12 €.

a) **(1.6 puntos)** Con un nivel de confianza del 92 %, obtenga el intervalo de confianza para proporción de establecimientos que tienen un precio máximo de 12 €.

b) **(0.4 puntos)** Si aumentamos el nivel de confianza al 99 %, ¿qué efecto se produce en el error de estimación?

c) **(0.5 puntos)** ¿Cuántos establecimientos, como mínimo, deberíamos seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99 %, el error de la estimación no sea superior a 0.04?

A.4.a)

$P[Z\le z_{\alpha/2}]=\dfrac{1+p}{2}=\dfrac{1+0{,}92}{2}=0{,}96$ → $z_{\alpha/2}=1{,}751$; $\overline{p}=\dfrac{80}{120}=0{,}67$

Intervalo de confianza para la proporción: $\left(\overline{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\,,\,\overline{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right)=(0{,}59\,;\,0{,}74)$

A.4.b) Aumentaría el valor de $z_{\alpha/2}$, por lo que la amplitud del intervalo aumenta. El error aumenta.

A.4.c) $P[Z\le z_{\alpha/2}]=\dfrac{1+p}{2}=\dfrac{1+0{,}99}{2}=0{,}995$ → $z_{\alpha/2}=2{,}576$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$; $n=\left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot\overline{p}(1-\overline{p})=921{,}51$;

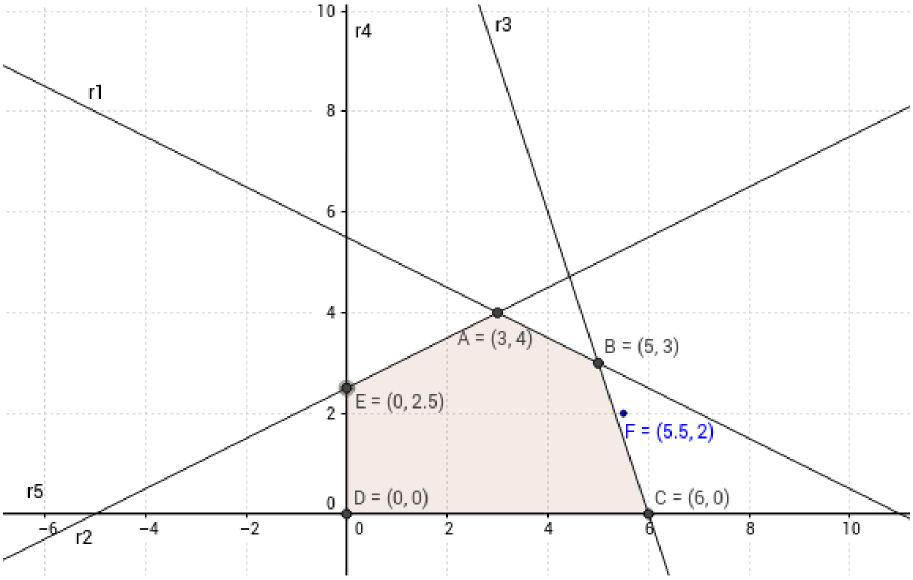
Debemos seleccionar al menos 922 establecimientos

EJERCICIO 1
Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x+2y\le 11 \qquad x\ge 2y-5 \qquad 3x+y\le 18 \qquad x\ge 0 \qquad y\ge 0$$

a) **(1.5 puntos)** Dibuje la región que definen y calcule sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** ¿Pertenece el punto $(5.5\,,\,2)$ a la región anterior ?
c) **(0.5 puntos)** Calcule los puntos de esa región en los que la función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determine dichos valores.

B.1.a)



B.1.b) "Parece que no", pero hay que comprobarlo: sustituímos en la tercera inecuación:

$3\cdot 5{,}5+2\le 18\ :\ Falso$. El punto está fuera de la región

B.1.c) $F(A)=18\ ;\ F(B)=19\ ;\ F(C)=12\ ;\ F(D)=0\ ;\ F(E)=7{,}5$.

El máximo se alcanza en *B* con un valor de *19* y el mínimo en *D* con un valor de *0* .

EJERCICIO 2
a) **(1.5 puntos)** Calcule los valores de los parámetros a y b para que la gráfica de la función $f(x)=x^3+ax^2+b$ presente un extremo relativo en el punto $(2\,,6)$.
b) **(1 punto)** Para $a=1$ y $b=1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x=1$.

B.2.a) $f'(x)=3x^2+2ax$

$f(2)=6\ \rightarrow\ 8+4a+b=6\ \rightarrow\ 4a+b=-2$
$f'(2)=0\ \rightarrow\ 12+4a=0\ \rightarrow\ a=-3\ \rightarrow\ b=10$

B.2.b) $f(x)=x^3+x^2+1\ ;\ f'(x)=3x^2+2x\ ;\ t:\quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$f'(1)=5\quad ;\quad f(1)=3$

$t:\quad y=5(x-1)+3\quad ;\quad y=5x-2$

EJERCICIO 3
El 10 % de las personas que acuden a un servicio de urgencias lo hace por problemas respiratorios, de éstos el 80 % son fumadores, mientras que de los que acuden por otros problemas solo el 5 % son fumadores. Se elige, al azar, una persona de las que acuden al servicio de urgencias.
a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que haya acudido por problemas respiratorios y no sea fumador?
b) **(1.5 puntos)** Si la persona elegida es fumadora, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido por problemas que no son respiratorios?

B.3)

	R	R'	
F	8	4,5	12,5
F'	2	85,5	87,5
	10	90	100

8% de 10 = 8 ; 5% de 90 = 4,5

B.3.a) $p(R\cap F')=\frac{2}{100}=0,02$

B.3.b) $p(R'/F)=\frac{4,5}{12,5}=0,36$

EJERCICIO 4
El precio de un determinado producto se distribuye según una ley Normal de desviación típica 5 € y media desconocida. Se toman 10 comercios al azar y se observa en ellos el precio de este producto, resultando los siguientes valores en euros:
96 108 97 112 99 106 105 100 98 99
a) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la distribución del precio medio del producto en las muestras de tamaño 10?
b) **(1 punto)** Determine un intervalo de confianza, al 97 %, para la media poblacional.
c) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra de esa población para que el error cometido sea menor que 2?

B.4.a) $X\to N(\mu,5)\ ;\ \bar{X}\to N(\mu,\frac{5}{\sqrt{10}})$

B.4.b) $\bar{X}=\frac{96+108+97+112+\ldots}{10}=102$. $p(z\le z_{\alpha/2})=\frac{1+0,97}{2}$; $z_{\alpha/2}=2,17$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(98,57\ ;\ 105,43)$

B.4.c) $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=29,43$; La muestra debe ser de al menos 30 productos