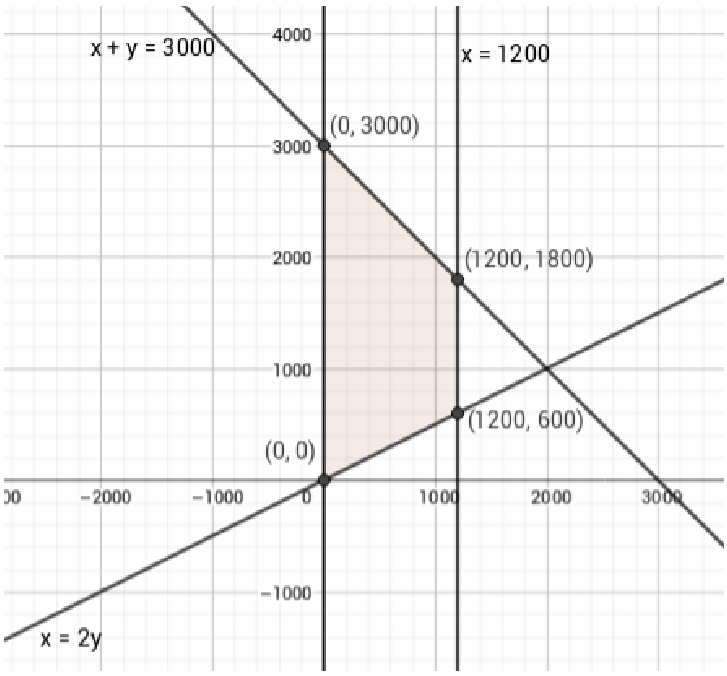
EJERCICIO 1
(2.5 puntos) Una empresa envasa y comercializa leche entera y leche desnatada. El litro de leche entera envasado genera un beneficio diario a la empresa de 0.4 € y el de leche desnatada de 0.1 €. La tecnología de la empresa impone que el número de litros de leche entera que se envasan diariamente no supere el doble del número de litros de leche desnatada. Además, la cantidad máxima de leche que se puede envasar diariamente es un total de 3000 litros y solo se dispone de 1200 litros diarios de leche entera para envasar.
¿Cuánto debe envasar de cada producto para obtener el beneficio máximo? ¿A cuánto ascendería este beneficio?

A.1.a) *x* : litros de leche entera ; *y* : litros de desnatada

$x \le 2y$
$x + y \le 3000$
$x \le 1200$
$x \ge 0 \quad ; \quad y \ge 0$
Beneficio: $B(x, y) = 0{,}4x + 0{,}1y$



B(0 , 0) = 0

B(0 , 3000) = 300

B(1200 , 1800) = 660

B(1200 , 600) = 540

El máximo beneficio se alcanza envasando *1200 l* de entera y *1800 l* de desnatada, siendo de *660 €*

EJERCICIO 2

En una especie animal la contracción del iris, en décimas de milímetro, después de exponer el ojo a una luz brillante durante un determinado tiempo, viene dada por

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & si \quad 0\le t\le 2 \\ \dfrac{4}{t-1} & si \quad t>2 \end{cases}$$

donde t es el tiempo, en segundos, que transcurre desde que se concentra la luz en el ojo.

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función f, determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas, en caso de que existan.

c) **(0.5 puntos)** Determine en qué instante se obtiene la máxima contracción y su valor.

A.2.a) El primer trozo es una polinómica, que es continua y derivable en su dominio. El segundo trozo no sería continua en *t = 1* , pero no está en su dominio. Solo hay que estudiar *t = 2* :

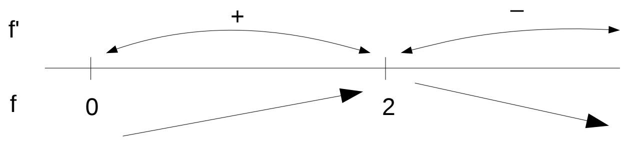
$$f(2)=\lim_{t\to 2^-} f(t)=4 \qquad \lim_{t\to 2^+} f(t)=4$$

. La función es continua en *t = 2*. La función es continua en *[0 , + ∞)*

$$f'(t)=\begin{cases} 2t & , si \quad 0\le t<2 \\ \dfrac{-4}{(t-1)^2} & , \quad si \quad t>2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} f'(2^-)=4 \\ f'(2^+)=-4 \end{matrix}$$

. La función no es derivable en *t = 2*. La función es derivable en *[0 , 2)* y en *(2 , + ∞)*

A.2.b)

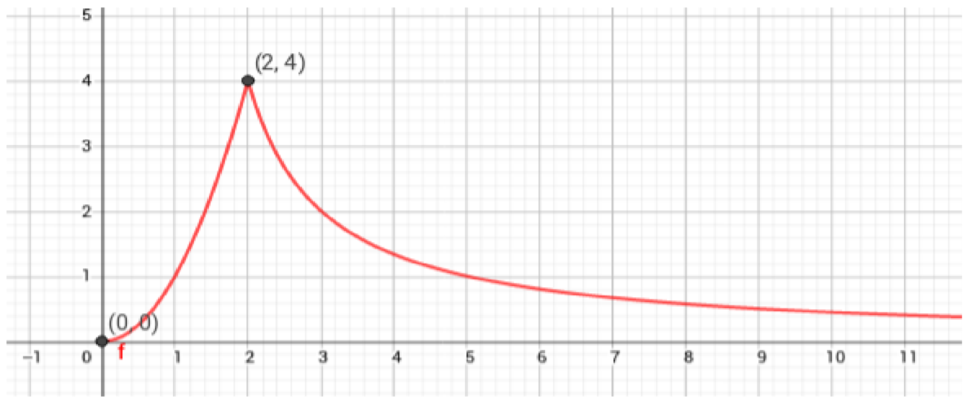


La función es creciente en *(0 , 2)* y decreciente en *(2 , + ∞)*.

Tiene un máximo relativo en *(2 , 4)* y un mínimo en *(0 , 0)*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

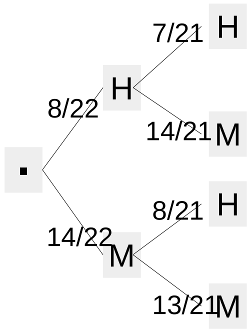
. Tiene una asíntota horizontal en *y = 0*. No tiene verticales.



A.2.c) El máximo es absoluto. La mayor concentración se obtiene a los 2 segundos, siendo de 4 décimas de milímetro.

EJERCICIO 3
En un departamento de una Universidad hay 8 profesores y 14 profesoras. Se quiere constituir una comisión formada por 2 miembros del departamento, elegidos al azar.
a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sean profesoras?
b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la comisión esté constituida por un profesor y una profesora.
c) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que en la comisión no haya ninguna profesora.

A.3)



a) $p(MM)=\frac{14}{22}\cdot\frac{13}{21}=\frac{13}{33}$

b) $p(HM\cup MH)=\frac{8}{22}\cdot\frac{14}{21}+\frac{14}{22}\cdot\frac{8}{21}=\frac{16}{33}$

c) $p(HH)=\frac{8}{22}\cdot\frac{7}{21}=\frac{4}{33}$

EJERCICIO 4
Se desea estimar la proporción de jóvenes que ven una serie de televisión. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 100 jóvenes, de los que 36 ven la serie.
a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza, al 96 %, para la proporción de jóvenes que ven la serie.
b) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error máximo sea inferior a 0.03, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?

A.4.a)

$$P[Z\le z_{\alpha/2}]=\frac{1+p}{2}=\frac{1+0{,}96}{2}=0{,}98 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2}=2{,}54 \quad ; \quad \overline{p}=\frac{36}{100}=0{,}36$$

Intervalo de confianza para la proporción: $\left(\overline{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\;,\overline{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right)=(0{,}26\,;\;0{,}46)$

A.4.b)

$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \quad ; \quad n=\left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot\overline{p}\,(1-\overline{p})=1079{,}78\,;$ La muestra debe ser de al menos 1080 jóvenes

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

a) **(1.2 puntos)** Razone cuáles de las siguientes operaciones son posibles:

$$A\cdot B^t \qquad B+3C \qquad C\cdot B^t \qquad A\cdot B+C$$

b) **(1.3 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $A\cdot B\cdot X=C$

B.1.a) $A_{2\times3}\cdot B^t_{2\times3}$: No es posible multiplicar

$B_{3\times2}+3C_{2\times2}$: No es posible la suma

$C_{2\times2}\cdot B^t_{2\times3}$: Sí es posible multiplicar. El resultado es una 2×3

$A_{2\times3}\cdot B_{3\times2}+C_{2\times2}$: Sí es posible multiplicar y sumar. El resultado es una 2×2

B.1.b) $X=(A\cdot B)^{-1}\cdot C$

A · B $\rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ Inversa (A · B) $\rightarrow \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ Inversa ((A · B)) · C $\rightarrow \begin{pmatrix}6 & 1\\ 5 & 0\end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-4} & si \quad x\le 0\\ x+3 & si \quad 0<x<2\\ x^2+1 & si \quad x\ge 2\end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad de la función en su dominio y clasifique sus discontinuidades, en caso de que exista alguna.
b) **(1 punto)** Estudie la derivabilidad de la función en su dominio.

B.2.a) $Dom(f)=\mathbb{R}$, puesto que $x = 4$ no está en el dominio del primer trozo (función racional). Por tanto la función es continua y derivable en su dominio, excepto, quizá en los "puntos de unión". Estudiemos estos puntos:

$f(0)=\lim_{x\to0^-} f(x)=-\dfrac{1}{4}$. La función no es continua en $x = 0$. Discontinuidad de salto finito.
$\lim_{x\to0^+} f(x)=3$

$f(2)=\lim_{x\to2^-} f(x)=5$. La función es continua en $x = 2$. La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$
$\lim_{x\to2^+} f(x)=5$

B.2.b) $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{(x-4)^2} & , \ si \ \ x<0 \\ 1 & , \ si \ \ 0<x<2 \\ 2x & , \ si \ \ x>2 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} f'(2^-)=1 \\ f'(2^+)=4 \end{matrix}$. No es derivable en $x = 2$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0,2\}$

EJERCICIO 3

Los alumnos que cursan una asignatura deben realizar dos exámenes: uno teórico y otro práctico. El 50 % de los alumnos aprueba los dos exámenes, el 6 % no aprueba ninguno y el 20 % solo aprueba el teórico. Se elige un alumno al azar.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?

b) **(1.5 puntos)** Si ha aprobado el teórico, ¿cuál es la probabilidad de que no apruebe el examen práctico?

B.3)

	T	T’	
P	50	24	74
P’	20	6	26
	70	30	100

a) $1-p(T'\cap P')=1-0{,}06=0{,}94$

b) $p(P'/T)=\dfrac{20}{70}=0{,}286$

EJERCICIO 4

El peso de los paquetes de levadura de una marca sigue una ley Normal de desviación típica 0.3 g. Se desea construir un intervalo de confianza, al 98 %, para estimar la media. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 9 paquetes.

a) **(1.25 puntos)** ¿Qué amplitud tendrá dicho intervalo?

b) **(1.25 puntos)** Obtenga el intervalo sabiendo que los pesos, en gramos, de los paquetes son:

10 9.9 10.04 9.5 10.1 9.8 10.2 10 10.3

B.4.a) $Amplitud=2\cdot Error$

$$p(z\leq z_{\alpha/2})=\frac{1+0{,}98}{2} \quad ; \quad z_{\alpha/2}=2{,}326$$

$$A=2E=2z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\cdot 0{,}2326=0{,}4652$$

B.4.b) $\bar{X}=\dfrac{10+9{,}9+10{,}04+\ldots}{9}=9{,}98$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(9{,}75 \ ; \ 10{,}21)$